Årg. 41:2 Juni 1958

ELEMENTA

Tidskrift för matematik, fysik och kemi

ANDRA HÄFTET

KARL MYRBÄCK, Nucleinämnenas kemi. Nobelpriset i kemi 1957 89

JOSEF ANDERSSON, Standardekvationerna för ellips och hyperbel 101

BIRGER GRUNDSTRÖM, Heisenbergs osäkerhetsrelation i gymnasieundervisningen 105

ERIK WALLES, Tröghetskrafter i skolfysiken 114

AARRE SAARNIO, Centralrörelse 119

ARVID HEDELIUS, Modeller för kemiundervisningen 121

K. ERIKSSON, Framställning av klordioxid för blekning av pappersmassa . . . 123

HANS GUSTAF HANSSON, Reflexioner kring ett examensprov i kemi 125

TORE ÖBERG, Approximativa tyngdpunktsformler 128

Bokanmälningar: GOUYON, Précis de mathématiques spéciales; HULTMAN, Livförsäkringsteknik; KEMENY/SNELL/THOMPSON, Introduction to Finite Mathematics; DIXMIER, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien; FRÖBERG, Complete Elliptic Integrals; WILLERS, Methoden der praktischen Analysis; HILL, Statistical Mechanics; CULLWICK, Electromagnetism and Relativity; KAHRA, Die spezielle Relativitätstheorie; ZEMANSKY, Heat and Thermodynamics; MACKEY/BARNARD/ELLENWOOD, Engineering Thermodynamics; MEGAW, Ferroelectricity in Crystals; GRAEWE, Atomphysik; BOHR, Atomfysik og menneskelig Erkendelse; FRIEDRICH/LANGEHEINE, Atomphysik im Unterricht; FRIEDRICH/LANGEHEINE/ULBRICHT, Versuche zur Atomphysik; forts. å omslagets andra sida.

Problemavdelning:
Matematiska uppgifter (red. av S. BÅGMAN) 150
Matematiska och fysikaliska uppg. i studentexamen mars 1958 152
Realexamen v.t. 1958: Provräkningar 160
Praktisk realexamen v.t. 1958: Uppg. i fysik, Uppg. i kemi med laboratorieteknik, Uppg. i beskrivande maskin- och byggnadslära 162

Författare i detta häfte (omslaget); Insänd litteratur (167)

Annonsörer: Almqvist & Wiksell; Rudolph Grave; Lindståhls Bokhandel; Norstedt & Söner; Svenska Bokförlaget.

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16[IV] STOCKHOLM

ELEMENTA

Årligen fyra häften (mars, juni, sept., dec.). Prenumeration sker genom inbetalning å postgiro 527 55; pr år kr. 15:—, pr häfte kr. 4:25. Tidskriften sändes som utgivarkorsband.

Red. och utgivare: fil. dr C. E. Blom, Karlbergsv. 16, Stockholm.

Tidigare årg. Förfråga Eder direkt hos red. Av årg. 1—13 är flera ofullständiga. Priset pr årg. (i häften) är för årg. 14 (1931) t.o.m. 34 (1951) kr. 10:—, för årg. 35—38 kr. 12:50, för årg. 39 och 40 kr. 15:—.

Pärmar av grön klot à 3:— + 25 öre i porto; varje pärm avsedd för två årg.

Problemhäften för åren 1943—52 à kr. 1:20, för 1953—1955 à kr. 1:40, för 1956 och 1957 à 2:20. Innehåll: Student- o. realex.-uppg. i matem. o. fysik med svar och anvisningar.

Särtryck ur ELEMENTA:

2. M. Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 2:—.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 2:—.
6. S. Comét, Matrisräkning. Slut.
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2:40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 2:—.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 2:60.
10. L. G. Sillén, Kemistens hjärna - ett utrymmesproblem, kr. 2:—.
11. C.-E. Fröberg—G. Kjellberg—O. Boivie, Siffermaskiner och hålkortsmaskiner, kr. 3:—.
12. Karin Aurivillius, Analysvågen, kr. 2:40.
13. Uno Trägårdh, Primär- och sekundärelement, kr. 2:40.
14. K.-B. Augustinsson, Enzymkemi, kr. 2:60.

De nya skrivningstyperna i matematik i studentex. finner Ni i Problemhäfte 1957 (skrivningarna i mars, juni, nov.) och i Problemhäfte 1956, som utom årets ex. uppg. innehåller Skolöverstyrelsens »Övningsuppg. i matematik till studentexamen».

Problemhäften och övriga särtryck sändes pr korsband (porto 15 öre) om inbetalning sker till postgiro 527 55, Elementa, Karlbergsvägen 16, Stockholm.

Bokanmälningar (forts): Wiltshire, A further Handbook of Industrial Radiology; Paskell, Semiconductor Abstracts; The Physics and Chemistry of Life; Kosmos Bd 35; Charlot, L'analyse qualitative et les réactions en solution; Lederer, Chromatography; Robertsson, Modern Chemistry for the Engineer and Scientist; Stepanoff, Centrifugal and Axial Flow Pumps; Rase/Barrow, Project Engineering of Process Plants; Mabie/Ocvirk, Mechanisms and Dynamics of Machinery; Aversten, Svetsning; Kalaja, Atlas över norra stjärnhimlen för Skandinavien; Parck, Imitation av lyxvaror; Lundberg, Hydromaskinlära 130

Författare i detta häfte: fil. dr J. Andersson, Vaxholm; civiling. E. Asplund, Stockholm; professor Fr. Dahlgren, Stockholm; lektor E. Dahlin, Stockholm; lektor Fr. Ehrnst, Stockholm; lektor B. Englund, Uppsala; civiling. K. Eriksson, Härnösand; fil. lic. W. Forsling, Stockholm; lektor Th. Forsner, Gävle; laborator C.-E. Fröberg, Lund; lektor H. G. Hansson, Lund; lektor A. Hedelius, Stockholm; lektor P. Häggmark, Göteborg; fil. kand. N. Ingri, Stockholm; lektor C. V. Jonsson, Ludvika; civiling. G. Markesjö, Stockholm; professor K. Myrbäck, Stockholm; lektor S. Nylinder, Stockholm; docent J. Nyström, Stockholm; civiling. A. Ramgard, Stockholm; laborator T. Rahmqvist, Stockholm; professor E. Rudberg, Stockholm; lektor Aa. Saarnio, Forssa, Finland; professor H. Slätis, Stockholm; fil. lic. V. Stenström, Stockholm; lektor E. Storm, Stockholm; professor N. Svartholm, Göteborg; professor J. Tandberg, Stockholm; lektor E. Walles, Falun; lektor T. Öberg, Norrköping.

Bilaga: Lindståhls Bokhandel.

En bra bok
— nu ännu bättre

Öhman — Boierth

MÄNNISKO-KROPPEN
och dess funktioner

Fjärde upplagan Godkänd av Statens läroboksnämnd
5:75

Nytt

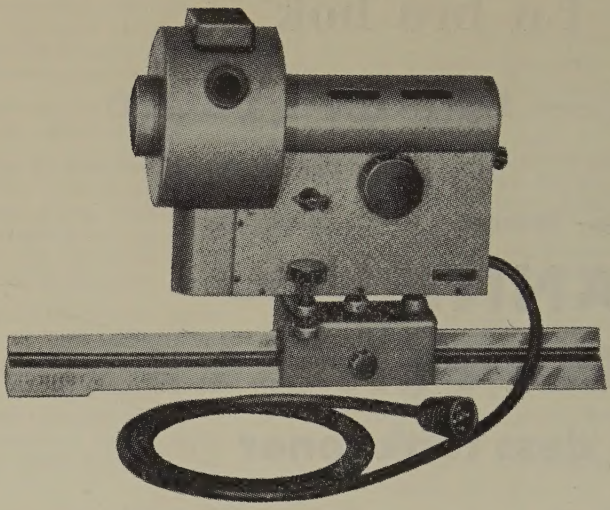
- Texten genomgående förenklad och förtydligad
- Ett kapitel om utvecklingsläran har tillkommit
- Nya illustrationer, såväl i färg som svart-vitt
- Boken har utökats med ett kapitel om samhällets hälsovårdande insatser och ett avsnitt om tobaken

"Förtjänt av att införas i samtliga Sveriges realskolor, flickskolor och enhetsskolor." *TfSL*

Beställ lärarex. genom att sätta in beloppet (4:31) på postgiro 758. Ange på talongen vad beställningen avser.

ALMQVIST & WIKSELL

Box 159 - Stockholm 1 - Postgiro 758



AUTOMATISK BÅGLAMPA

Fabr. Spindler & Hoyer

Begär specialprospekt

RUDOLPH GRAVE AB

SKOLAVDELNINGEN

STOCKHOLM 3
Malmskillnadsgatan 48 C
Tel. 23 37 80

MALMÖ 4
St. Nygatan 27 B
Box 41 58
Tel. 381 25

Sir Alexander Todd

Nucleinämnenas kemi

Nobelpriset i kemi 1957

Av professor Karl Myrbäck, Stockholm

1957 års nobelpris i kemi tilldelades professorn vid universitetet i Cambridge, Sir Alexander R. Todd »för hans arbeten över nucleotider och nucleotida coenzym». Todd, som är född 1907, blev efter studier i England och utomlands professor i Manchester 1938 och därefter i Cambridge 1944. Trots att hans tid, särskilt under senare år, i stor omfattning tagits i anspråk för administrativa uppgifter inom engelsk forskning, har Todd en synnerligen rikhaltig produktion av fundamentalt viktiga arbeten på flera av den organiska kemiens områden. En särställning intager härvidlag de nu prisbelönta arbetena, som Todd med sällsynt skicklighet och konsekvens utfört under de senaste omkring femton åren. De behandla nucleotidartade ämnen, sålunda nucleinsyrorna och deras nedbrytningsprodukter samt vissa coenzymer, som äro eller innehålla nucleotider. Till denna grupp kan i viss mån också räknas vitamin B_{12}.

Det torde vara överflödigt att här närmare ingå på dessa substansgruppers betydelse; några antydningar torde dock vara på sin plats.

Det må då erinras om att beteckningen nucleinsubstans, införd av tysken F. Miescher 1869, hänför sig till ämnenas förekomst i cellkärnor. Även om det senare visat sig, att förekomsten ingalunda är inskränkt till cellkärnorna, är det utan tvivel så, att nucleinsyrorna i cellkärnorna ha en biologisk betydelse av hart när oöverskådlig räckvidd. De viktigaste beståndsdelarna av kromosomerna äro ju nucleoproteider, dvs. föreningar mellan högmolekylära nucleinsyror och proteiner, och dessa nucleoproteider ge generna, de egentliga bärarna av de ärftliga egenskaperna, deras karaktär och betinga deras verkan. Mycket är naturligtvis ännu outrett på detta komplicerade område, men dock torde kunna sägas, att förklaringen till nucleinsyrornas verkan i nämnda hänseende sammanhänger med en speciell funktion vid äggvitesyntesen. Det är här ej platsen att ingå på nu aktuella arbetshypoteser härvidlag; det må endast nämnas att vi bakom de föreställningar, vi nu ha om nucleinsyremolekylernas struktur och geometri, synas kunna skymta förklaringen till gåtfulla fakta, såsom att en nucleinsyremolekyl tydligen under lämpliga biologiska betingelser kan inducera bildning av likadana molekyler, dvs. reproducera sig själv, och även fungera som »mall» (på engelska användes vanligen termen »template») vid uppbyggnaden av specifika proteiner.

Till belysning av nucleinsyrornas biologiska betydelse må ytterligare nämnas deras förekomst som de för den fysiologiska verkan viktigaste komponenterna i virus, bacteriofager och s. k. transformerande faktorer. Det är säkerligen också i dessa fall nucleinsyremolekylernas roll vid syntesen av ny nucleinsyra och vid äggvitesyntesen, som är bakgrunden till de biologiska verkningarna.

Det kan synas egendomligt, att nucleinsyrornas kemi under de snart hundra år, som gått sedan deras upptäckt, icke förrän på sista tiden gjort verkligt stora framsteg. Endast ett enda nobelpris har tidigare utdelats för arbeten inom nucleinsyrekemien, nämligen ett pris i fysiologi och medicin, som den tyske forskaren A. Kossel 1910 erhöll »såsom ett erkännande för den insats, han genom sina arbeten rörande äggviteämnen, däri jämväl inbegripna nucleinsubstanserna, gjort till kännedomen om cellens kemi». Bland andra forskare, som bidragit till den tidigare utvecklingen av nucleinsubstansernas kemi, bör också nämnas amerikanaren P. A. Levene. Den långsamma utvecklingen på området kan säkerligen till största delen tillskrivas problemens svårighetsgrad. Visserligen hade genom bl. a. de nämnda forskarnas arbeten naturen av de i de högmolekylära nucleinsyrorna ingående grundsubstanserna klargjorts; man fann, att nucleinsyrorna kunna betraktas som polymerer av s. k. nucleotider (mononucleotider), vilka i sin tur innehålla dels en heterocyklisk bas, dels en sockerart, dels fosforsyra. Om bindningarna mellan dessa beståndsdelar voro emellertid

uppfattningarna synnerligen oklara, och redan beträffande de enkla nucleotiderna var det omöjligt att ange en definitiv struktur. Då fullständig kännedom om denna ju måste vara grunden för förstående av de mer invecklade nucleinsubstansernas byggnad, inser man det förklarliga i att deras kemi länge var en tämligen vit fläck på kartan. Någon tanke på sammanhanget mellan kemisk byggnad och fysiologisk verkan var naturligtvis helt omöjlig.

Några grundläggande begrepp

För att underlätta den följande framställningen måste vi här klargöra vissa begrepp. Som redan nämnts, insåg man relativt tidigt, att nucleinsyrorna bestå av nucleotider, uppbyggda av en kvävebas, en sockerart samt fosforsyra. Nucleinsyrorna äro av två slag, *ribonucleinsyra* (RNA) innehållande sockerarten D-ribos, samt *deoxiribonucleinsyra* (DNA) som i stället för D-ribos innehåller 2-deoxi-D-ribos. Kvävebaserna äro i nucleinsyrorna antingen purin- eller pyrimidinderivat; i RNA ingå fyra, nämligen adenin (6-aminopurin), guanin (2-amino-6-hydroxipurin), uracil (2,6-dihydroxipyrimidin) och cytosin (2-hydroxi-6-aminopyrimidin), i DNA ingå adenin, guanin, cytosin, thymin (2,6-dihydroxi-5-metylpyrimidin) samt i små mängder 5-metylcytosin samt 5-hydroximetylcytosin.

Sockerarterna äro glykosidiskt bundna till kvävebaserna; glykosider av denna typ benämnas *nucleosider*, t. ex.

adenin och ribos (adenosin)
guanin » » (guanosin)
uracil » » (uridin)
cytosin » » (cytidin)

De enkla *nucleotiderna* äro monofosforsyreestrar av nucleosider; fosforsyran är bunden till sockret. Exempel:

adenin-ribos-fosforsyra (adenosinmonofosforsyra, adenylsyra)

De s. k. *nucleotida coenzymerna* äro ämnen av nucleotidartad byggnad, vilka som för den katalytiska verkan nödvändiga komponenter ingå i vissa enzymer. De verksamma enzymerna äro i dessa fall proteider, dvs. föreningar av äggviteämnen (»apoenzymer») med coenzymer (prostetiska grupper). I motsats till apoenzymerna äro coenzymerna lågmolekylära ämnen, vanligen rätt termostabila.

Det första av dessa coenzymer upptäcktes redan 1905 av de engelska forskarna Harden och Young som en nödvändig beståndsdel av den alkoholiska jäsningens enzymsystem (»zymas»). Först i slutet av 1920-talet kunde ämnets verkan vid alkoholjäsningen lokaliseras till vissa i jäsningsförloppet ingående oxido-reduktioner. Ämnet renframställdes

och visade sig vara en dinucleotid av adenosinmonofosforsyra och nikotinsyreamidmononucleotid med den schematiska formeln

Adenin-ribos—O—PO(OH)—O—PO(OH)—O—ribos-nikotinsyreamid

Coenzymet benämnes numera oftast difosfopyridinnucleotid, förkortat DPN$^+$. I ett stort antal oxidationsenzymer, de s. k. pyridinenzymerna, förekommer detta coenzym, bundet till olika proteiner. Nära besläktad med detta coenzym är trifosfopyridinnucleotiden, TPN$^+$, som har en alldeles analog uppgift.

Vissa andra oxidationsenzymer, de s. k. gula enzymerna, äro också sammansatta av äggvita och nucleotidartade coenzym, nämligen antingen flavinmononucleotiden (lactoflavinfosforsyra, monofosforsyreester av vitamin B_2), förkortat FMN:

Dimetylisoalloxazin-ribitol-fosforsyra

eller flavin-adenin-dinucleotid (FAD):

Dimetylisoalloxazin-ribitol—O—PO(OH)—O—PO(OH)—O—ribos-adenin

Som exempel på en annan variant bland de nucleotida coenzymerna kan nämnas uridin-difosfat-glukos, vanligen förkortat till UDP-Glukos eller UDPG:

Uracil-ribos—O—PO(OH)—O—PO(OH)—O—glukos

Ämnet upptäcktes av den argentinske forskaren L. F. Leloir i samband med undersökningar rörande den enzymatiska omvandlingen av galaktos i glukos. Coenzymer av denna typ, i vilka tydligen ett nucleosiddifosfat är förestrat med en sockerart eller vissa andra ämnen (sockerderivat, alkoholer, aminosyror), ha mycket stor betydelse icke endast för den nämnda omvandlingen utan också för ett stort antal biologiska synteser, t. ex. av di- och polysackarider, glucuronider, fosfatider m. m.

Till de nucleotida coenzymerna kunna också räknas de olika nucleosidpolyfosfaten, främst den av tysken Lohmann upptäckta adenosintrifosforsyran (ATP)

Adenin-ribos—O—PO(OH)—O—PO(OH)—O—$PO(OH)_2$

Nucleosidpolyfosfaten, som tillhöra de s. k. energirika fosfaten, ha fysiologiskt ytterst betydelsefulla uppgifter, bl. a. för den energetiska kopplingen mellan de energigivande reaktionerna i cellerna (oxidationer, »förbränning») och energikrävande synteser.

Beträffande Todds undersökningar av här nämnda och andra ämnen av nucleotidkaraktär kan man med skäl använda ordet grundläggande; först genom hans arbeten ha nämligen bindningsförhållandena i hithörande ämnen slutgiltigt klarlagts och därigenom en fast grund skapats för en kommande utveckling, en utveckling, som med tanke på nucleinsubstansernas biologiska roll kan väntas ge resultat av oerhörd räckvidd.

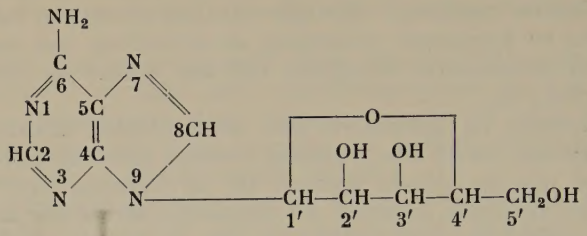
Todds arbeten ha genomförts med utomordentlig skicklighet och målmedvetenhet. Såväl den organiska kemiens klassiska metoder som en mängd nya ha därvid kommit till användning; den entydiga syntesen av ett ämne är oftast det slutgiltiga beviset för den struktur, som underbyggts på andra sätt. Det är ganska självklart, att för sådana synteser ofta mycket subtila metoder måste tillämpas, ej minst med tanke på den ibland ganska ringa stabiliteten av de ämnen det är fråga om.

Enkla nucleosider, nucleotider och nucleinsyror

Även om man vet, att en nucleosid är en förening av glykosidtyp mellan en pentos och en purin- resp. pyrimidinbas, så är ju därmed föreningens struktur ingalunda klar. I första hand måste man veta med vilken atom i basen sockerarten är förenad glykosidiskt. Todd har här genom undersökningar av olika slag och slutligen genom entydiga synteser kunnat visa, att det alltid är fråga om kväveatomen 9 i purinerna och kväveatomen 3 i pyrimidinerna; nucleosiderna äro sålunda alltid N-glykosider. Ofta ha Todds synteser utförts så, att sockerresten på ett tidigt stadium införts på entydigt sätt i en relativt enkel kväveförening, på vilken sedan exempelvis purinringsystemet uppbyggts. (Numreringen av atomerna i ringsystemen framgår av formlerna I och II; sockerarternas kolatomer numreras 1′—5′.)

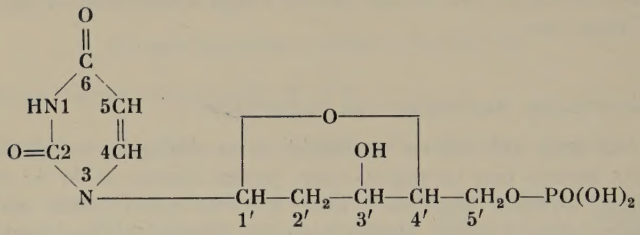
En annan fråga, som uppställer sig redan hos nucleosiderna, rör sockerartens ringform: pyranos (6-ring) eller furanos (5-ring). Todd har här kunnat visa, att i samtliga fall furanosformen föreligger (jämför formlerna I och II). Vid dessa undersökningar har bl. a. den inom kolhydratkemien flitigt använda perjodatoxidationen kunnat utnyttjas. Perjodat oxiderar som bekant specifikt glykoler; i exempelvis adenosin (formel I) spränges ribosens kolkedja mellan 2′ och 3′, så att ett dialdehyd-derivat uppstår. Då samma dialdehyd bildas vid perjodatoxidation av adenin-glukosid eller adenin-mannosid, ha välkända förhållanden vid dessa lättillgängliga och ingående studerade sockerarters derivat ibland tillåtit slutsatser också beträffande de naturliga glykosiderna. Bland annat genom sådana jämförelser har

Todd kunnat visa att glykosidbindningen i nucleosider och nucleotider är av β-typen.



(I)

Nucleosid (adenosin).



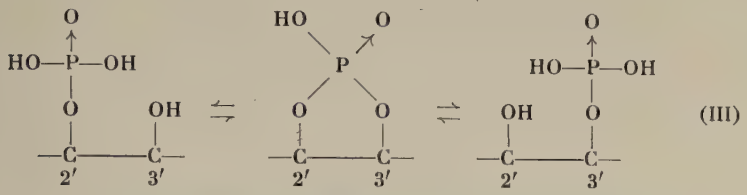
(II)

Nucleotid (2′-deoxiuridin-5′-fosforsyra).

Hos nucleotiderna (nucleosidmonofosfaten) tillkommer ett nytt problem, nämligen att bestämma fosfatgruppens ställning; att fosfatgruppen är bunden till sockret, visste man redan tidigare. Är fosfatgruppen bunden i 5′-ställning (formel II) är problemet förhållandevis enkelt. Genom syntes av adenosin-5′-fosforsyra har Todd exempelvis kunnat visa, att den s. k. muskeladenylsyran har fosfatgruppen i 5′-ställning. Han utgick vid syntesen från adenosin (formel I). Hydroxylerna i 2′ och 3′ skyddades genom att adenosinet först överfördes i en acetonförening (2′,3′-isopropyliden-adenosin), varefter fosforylering ju endast kan inträda vid hydroxylen i 5′.

Betydligt mer invecklade äro förhållandena hos nucleotider, som ha fosfatgruppen i annan ställning är 5′. Vid nedbrytning av ribonucleinsyra får man en blandning av nucleotider, men fosfatgruppens ställning i dessa varierar, så att såväl 5′- som 2′- och 3′-nucleotider förekomma. Man kan härav försöksvis dra slutsatsen, att nucleotiderna i ribonucleinsyra äro förenade genom fosforsyregrupper, som åt ena hållet äro förestrade med hydroxylen vid 5′ i en nucleotid, åt andra hållet med en hydroxyl vid 2′ eller 3′ i nästa nucleotid. För att klargöra bindningsförhållandena i nucleinsyrorna måste man

givetvis med bestämdhet veta mellan vilka atomer i nucleotiderna dessa »fosfatbryggor» ligga. Todd har syntetiserat såväl 2′- som 3′-fosfat av nukleosider och kunde då konstatera att isomererna mycket lätt övergå i varandra, säkerligen med cykliska diestrar som mellanprodukter (formel III).



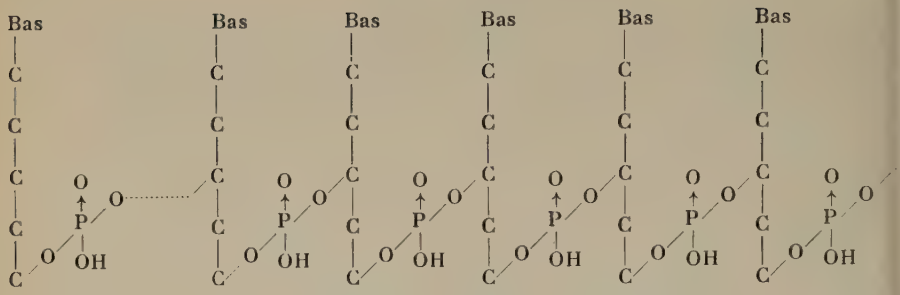
(III)

Isomera estrar övergå i varandra med cykliska diestrar som mellanprodukter.

Detta har naturligtvis i hög grad försvårat bestämningen av fosfatgruppernas förankring i nucleinsyrorna, men Todd har dock, stödd på många olika slag av undersökningar, kunnat bevisa, att i ribonucleinsyrorna ligga fosfatbryggorna mellan 3′ i en nucleotid och 5′ i nästa. Bindningar 2′—5′ förekomma icke, och ej heller bindningar 3′—3′ resp. 5′—5′. Hos deoxiribonucleinsyrorna äro förhållandena något enklare att klargöra, då ju sockerresterna ha hydroxyler endast i ställningarna 3′ och 5′ (formel II). Också i detta fall har visats, att i polynucleotiden endast bindningar 3′—5′ förekomma. Det har också av Todds arbeten framgått, att den alkaliska nedbrytningen av ribonucleinsyra, som tidigare betraktats som en hydrolys, primärt är en *omestring* till cykliska fosfat av ovan nämnd typ; sekundärt hydrolyseras dessa, varvid såväl 2′- som 3′-fosfat bildas.

En dithymidin-dinucleotid, där mononucleotiderna obestridligen äro bundna med fosfatbrygga i ställningen 3′—5′ har Todd syntetiserat; den förhöll sig i alla avseenden som de dinucleotider, som isolerats efter exempelvis enzymatisk nedbrytning av deoxiribonucleinsyra. Enzymatiska metoder ha även i övrigt spelat en betydlig roll vid uppklarandet av nucleinsyrornas struktur.

Formel (IV) visar schematiskt nucleinsyrornas byggnad enligt Todd. Formeln visar en enkel (oförgrenad) kedja av nucleotider. Otänkbart vore dock ej att kedjorna skulle kunna vara förgrenade, och Todd har ingående diskuterat denna möjlighet. En förgrening skulle kunna uppstå genom att de fria hydroxylerna vid fosforatomerna (formel IV) vore förestrade, så att »sidokedjor» utginge från fosfatgrupperna. Mot detta talar dock bestämt att syntetiskt framställda triestrar av fosforsyra av ifrågavarande slag visat sig ytterst obeständiga. Allmänt an-



Nucleinsyrornas byggnad enligt Todd.

tages därför att åtminstone deoxiribonucleinsyrans molekyler äro oförgrenade. I fråga om ribonucleinsyran är frågan något svårare att besvara, då förgreningar av kedjemolekylerna också kunna tänkas utgå från hydroxylen vid 2′ i ribosresten. Några experimentella resultat, som skulle tala för en sådan förening föreligga dock ej, och det förefaller som om man f. n. med rätt stor säkerhet kan antaga att även ribonucleinsyremolekylerna äro enkla kedjor utan förgreningar; Todd yttrar sig dock på denna punkt med någon försiktighet.

En synnerligen viktig men tillsvidare nästan helt olöst fråga rör sekvensen av nucleotiderna inom polynucleotiderna. Molekylerna kunna ju (jämför formel IV) sägas ha en »ryggrad» av omväxlande fosforsyre- och pentosrester. På denna ryggrad sitta de olika kvävebaserna; även om i regel endast fyra olika kvävebaser ingå i en nucleinsyra, kan ju genom variation av ordningsföljden dememellan ett oerhört stort antal isomerer uppkomma. Att antaga en fullkomligt slumpvis ordningsföljd synes uteslutet, då nucleinsyrorna (t. ex. i kromosomerna) ju måste antagas ha en synnerligen höggradig specifitet. Denna kan ej gärna tänkas bero på annat än att viss specifik verkan bestämmes av viss bestämd sekvens av mononucleotiderna i nucleinsyran.

Ett mycket liknande problem möter man som bekant hos proteinerna; här har man dock numera kommit mycket långt med sekvensbestämningarna. Aminosyresekvensen i insulinmolekylen är ju exempelvis helt klarlagd. Härvid ha de s. k. ändgruppsmetoderna varit utslagsgivande, dvs. metoder som tillåta bestämning av de aminosyrerester med fria amino- resp. karboxylgrupper, som bilda ändarna av en polypeptidkedja. Motsvarande metoder för nucleinsyror äro tänkbara, och Todd har angivit en sådan för den ändgrupp (gruppen längst till vänster i formel IV), som har fria hydroxyler vid såväl 2′ som 3′. Vid behandling av en polyribonucleotid med perjodat, bör ju kolkedjan mellan dessa kolatomer sprängas; ändgruppens bindning

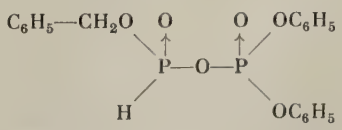
till fosforsyran hydrolyseras efter oxidationen mycket lätt, så att den oxiderade ändgruppen frigöres, varefter den i densamma ingående basen identifieras. En nackdel är att metoden av lätt insedda skäl ej kan användas för deoxiribonucleinsyra. Att densamma ännu ej kommit till användning för ribonucleinsyra, beror närmast på omöjligheten att f. n. med säkerhet avgöra om ett nucleinsyrepreparat är enhetligt eller ej; innan säkert enhetliga preparat föreligga, kan det ju knappast löna sig att göra ändgruppsbestämningar.

Utgående från Todds resultat beträffande nucleinsyrornas principiella byggnad ha andra forskare framlagt teorier för nucleinsyremolekylernas geometri. Av stort intresse är den av de engelska forskarna Watson och Crick konstruerade modellen, i vilken två nucleinsyrekedjor, sammanhållna av vätebindningar, bilda en dubbelspiral kring en gemensam axel. Möjligen kan en byggnad av detta slag ge en förklaring till nucleinsyremolekylernas förut omnämnda förmåga till »självreproduktion».

Nucleosidpolyfosfat och nucleotida coenzym

De utomordentligt viktiga di- och trifosfaten av de olika nucleisiderna ha syntetiserats av Todd enligt flera olika metoder; särskilt intresse har naturligtvis ägnats adenosintrifosforsyran (ATP). Den först använda och mest direkta metoden bygger på reaktionen mellan ett klorerat fosfat och ett salt av en lämpligt substituerad fosforsyra. Som fosforyleringsmedel har särskilt dibenzyl-fosforsyreklorid, $(C_6H_5—CH_2O)_2POCl$, kommit till användning, bl. a. därför att benzylgrupperna lätt kunna avlägsnas ur reaktionsprodukterna, exempelvis genom katalytisk hydrering. Det må här särskilt framhållas, att Todd skapat flera synnerligen värdefulla metoder för införande av fosfatgrupper på bestämd plats i en molekyl; man får betänka, att det därvid oftast gäller både att skydda flera olika reaktionsbenägna ställen i molekylen för reaktion med det fosforylerande reagenset, så att fosfatgruppen endast inträder i önskad ställning, och att sedan ur reaktionsprodukten utan att skada densamma avlägsna de grupper, som införts som skydd.

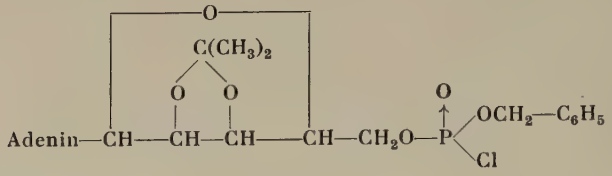
För vidare synteser synnerligen viktig är en av Todd funnen metod för framställning av organiska fosfiter. Monobenzyl-fosfit ger med difenylfosforsyreklorid anhydriden (V)



(V)

Anhydrid av monobenzylfosfit och difenylfosforsyra.

Denna reagerar med alkoholer, så att motsvarande benzylfosfiter bildas. Med adenosin, där hydroxylerna vid 2′ och 3′ skyddats genom kondensation med aceton, får man sålunda 2′,3′-isopropyliden-adenosin-5′-benzylfosfit och därur med N-klorsuccinimid kloriden (VI)

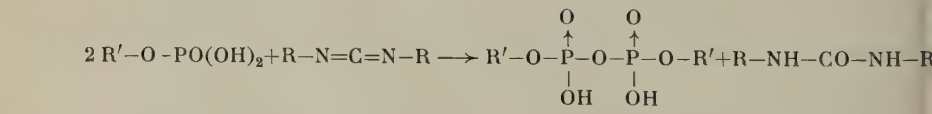


(VI)

Genom omsättning av denna eller likartade klorider med lämpliga salter av andra nucleotider fann Todd en väg till syntes av dinucleotider, i vilka de två nucleosiderna äro förenade genom en pyrofosfatgrupp. Sålunda kunde Todd genom omsättning av kloriden (VI) med silver- eller thalliumsaltet av riboflavinfosfat samt avlägsnande av de skyddande benzyl- och acetonresterna genomföra syntesen av den förut nämnda flavin-adenin-dinucleotiden (FAD), coenzym för de flesta gula enzymerna.

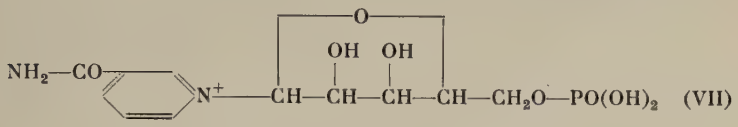
En modifikation av samma metod förde till syntes av uridin-difosfatglukos (UDP-Glucos) och motsvarande galaktosderivat (UDP-Galaktos).

En nackdel med metoder av detta slag kan ju vara, att omsättningarna måste genomföras i vattenfria lösningsmedel, vilket med hänsyn till de reagerande ämnenas natur kan erbjuda svårigheter. Vid sökande efter metoder för synteser, som skulle kunna genomföras även i vattenhaltiga medier och helst utan att skyddande substituenter först infördes, leddes Todd av tanken, att man borde kunna utnyttja reagens, som ej reagera med alkoholiska hydroxyler utan företrädesvis med syror under anhydridbildning. Diverse tänkbara vägar undersöktes; bästa resultat erhöll Todd med vissa disubstituerade carbodiimider, R—N=C=N—R. Fosforsyra resp. organiska fosforsyreestrar ge med dylika föreningar pyrofosforsyra resp. symmetriska diestrar av denna; carbodiimiden ger ett motsvarande urinämnederivat:



För framställning av symmetriska pyrofosfat är metoden utmärkt. Gäller det syntes av osymmetriska pyrofosfat blir arbetet väsentligen svårare, då man av naturliga skäl alltid får en blandning av den eftersträvade osymmetriska estern med de två symmetriska. Ett

mer eller mindre besvärligt arbete att skilja produkterna måste därför alltid följa. Trots detta har Todd enligt denna metod kunnat genomföra flera synteser av nucleotida coenzymer. Den förut nämnda UDP-Glukosen framställdes sålunda ur uridin-5′-fosfat och α-D-glukos-1-fosfat med dicyklohexyl-carbodiimid. På motsvarande sätt genomfördes också syntesen av difosfopyridinnucleotiden (DPN$^+$) ur adenosin-5′-forsorsyra och nikotinsyreamid-mononucleotid (VII)



(VII)

Nikotinsyreamid-mononucleotid.

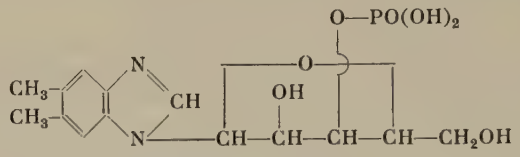
varvid särskilt syntesen av sistnämnda komponent erbjöd stora svårigheter. Den motsvarande nucleosiden erhålles enligt den klassiska metoden, dvs. kondensation av nikotinsyreamid med aceto-halogen-D-ribofuranos, varvid man erhåller en blandning av α- och (huvudsakligen) β-formen av nucleosiden. De två isomererna kunna ej skiljas, utan blandningen fosforyleras, varvid man naturligtvis får en blandning av α- och β-formerna av nucleotiden. Med blandningen genomföres sedan med adenosin-5′-fosforsyra och dicyklohexyl-carbodiimid i dimetylformamid eller vattenhaltig pyridin syntesen av dinucleotiden, vilken då utom β-formen, som är den naturliga difosfopyridinnucleotiden (DPN$^+$) också innehåller en mindre mängd α-form, vilken saknar coenzymaktivitet; dessutom bildas naturligtvis de båda symmetriska pyrofosfaten, i detta fall dock i rätt små mängder. Då β- och α-formerna av DPN$^+$ ej kunna skiljas kromatografiskt, göres en specifik reduktion med alkoholdehydrogenas, som endast reducerar den naturliga β-formen av dinucleotiden, DPNH. Denna kan genom elektrofores lätt skiljas från den ej reducerade α-formen.

Vitamin B_{12}

Den mot den perniciösa anemien verksamma faktorn i lever isolerades 1948, ungefär samtidigt av engelska och amerikanska forskare. Vitaminet, som fick beteckningen B_{12}, bildar starkt röda kristaller; den oväntade förklaringen till färgen visade sig vara, att vitaminet innehåller metallen kobolt (4,5 %). Vitaminet har en mycket komplicerad byggnad; dess bruttoformel är $C_{63}H_{90}N_{14}O_{14}PCo$. Strukturen kan emellertid numera anses vara fullt utredd. I utredningsarbetet ha förutom Todd många forskare deltagit; främst torde böra nämnas den amerikanske forskaren K. Folkers samt Dorothy Crowfoot Hodgkins

i Oxford. Den senares röntgenografiska undersökningar av vitaminet torde ha spelat en avsevärd roll för den fullständiga strukturformel, som uppställdes av Todd 1955 och som för övrigt grundades på egna och andras studier över kemisk nedbrytning av vitaminets molekyl och de därvid bildade produkterna.

Vid hydrolys av vitaminet erhåller man ett flertal produkter: a) Dimetyl-benzimidazol, ribos och fosforsyra, vilka i vitaminet äro förenade till en nucleotid med fosfatgruppen i ställningen 3′ (VIII).



(VIII)

Dimetylbenzimidazol-ribosid-3′-fosfat.

b) 1-Aminopropanol-(2), $NH_2—CH_2—CH(OH)—CH_3$, vars hydroxylgrupp i vitaminet är förestrad med fosforsyran i nucleotiden (VIII). c) molekylens kobolthaltiga kärnparti, vars byggnad i många avseenden påminner om häminernas. Koboltatomen är centralatom i ett ringsystem av fyra heterocykliska femringar (mer eller mindre hydrerade pyrrolringar). Från porfinets ringsystem i häminerna skiljer sig ringsystemet i vitamin B_{12} dels däri att det senare har färre dubbelbindningar, dels däri att två av ringarna äro direkt förenade utan mellanliggande kolatom.

Av koboltatomens sex kordinationsställen (jämför de »vanliga» komplexa koboltsalterna!) upptagas fyra av kväveatomerna i de fyra heterocykliska ringarna, det femte av ena kväveatomen i dimetylbenzimidazol (den övre i formel VIII), det sjätte av en cyanjon. Den sistnämnda, som även givit vitaminet namnet cyanocobalamin, kan utbytas mot vissa andra anioner. Då ringsystemet är till stor del mättat, få flera sidokedjor plats än i porfin; i vitamin B_{12} finnas ej mindre än 15, varav 8 metylgrupper, 3 acetamidgrupper, $—CH_2—CO—NH_2$, 3 propionamidgrupper, $—CH_2—CH_2—CO—NH_2$ samt en propionsyregrupp, $—CH_2—CH_2—COOH$, vars karboxylgrupp genom syreamidbindning är förenad med aminogruppen i den under b) omnämnda aminopropanolen. Vitaminmolekylens byggnad är sålunda mycket invecklad och ovanlig, och klargörandet av strukturen, till vilket som nämnt flera forskare bidragit, är en prestation av mycket hög klass.

Standardekvationerna för ellips och hyperbel

Av fil. dr Josef Andersson, Vaxholm

Det gäller att utgående från de vanliga på bägge brännpunkterna, $F(c;\,0)$, $F_1(-c;\,0)$, $c>0$, baserade definitionerna härleda kurvornas ekvationer utan att införa kvadratrötter.

För en godtycklig punkt $P(x;\,y)$ sättes $r=PF$, $r_1=PF_1$, dvs.

$$r^2=x^2-2cx+c^2+y^2,\quad r_1^2=x^2+2cx+c^2+y^2 \qquad (1)\,(1_1)$$

varav

$$r_1^2-r^2=(r_1+r)(r_1-r)=4cx \qquad (2)$$

Ellipsfallet

Man inför $a>c$

och fordrar

$$r_1+r=2a \qquad (3)$$

Man får då enl. (2)

$$r_1-r=\frac{2cx}{a} \qquad (3_1)$$

och ur (3) och (3_1)

$$r=a-\frac{cx}{a},\quad r_1=a+\frac{cx}{a} \qquad (4),\,(4_1)$$

Vid insättning av r i (1) eller r_1 i (1_1) erhålles

$$a^2-c^2=(a^2-c^2)\frac{x^2}{a^2}+y^2 \text{ och, med } b^2=a^2-c^2>0,$$

den sökta ekv.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (E)$$

Det finnes punkter P som uppfylla (3) t. ex. $(a;\,0)$ och de tillhöra alla ellipsen enligt härledningen. Finnas andra punkter på kurvan? Det skulle i så fall vara att r eller r_1 utfölle negativt i (4), (4_1) något som ej hade inverkan på slutekvationen. Men detta omöjliggöres av (E), som kräver $-a\leqq x\leqq a$.

Hyperbelfallet

Här införes $0<a<c$

och fordras $r_1-r=2a\varepsilon$; $\varepsilon=+1$ för $x>0$, $\varepsilon=-1$ för $x<0$ $\qquad (3')$

Man får då enl. (2)

$$r_1+r=\frac{2cx\varepsilon}{a} \qquad (3_1')$$

och ur (3′) och (3_1′)

$$r=\varepsilon\left(\frac{cx}{a}-a\right), \quad r_1=\varepsilon\left(\frac{cx}{a}+a\right) \qquad (4'), (4_1')$$

Vid insättning av r i (1) eller r_1 i (1_1) erhålles

$$(c^2-a^2)\frac{x^2}{a^2}-y^2=c^2-a^2 \text{ och, med } b^2=c^2-a^2>0,$$

den sökta ekv.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (H)$$

Det finnes punkter P som uppfylla (3′) t. ex. $(a; 0)$ och $(-a; 0)$; de tillhöra samtliga hyperbeln enligt härledningen. Endast om r eller r_1 i (4′), (4_1′) utfölle negativt, skulle en outsider kunna komma med. Detta förhindras av (H), som kräver $a \leqq x$ för $\varepsilon=+1$ och $x \leqq -a$ för $\varepsilon=-1$.

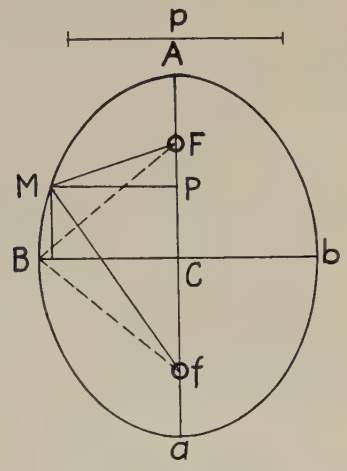
I anslutning till två uppsatser i Elementa [*40* (1957), 163 och 254] har tidskriftens redaktör önskat fästa uppmärksamheten på ovanstående metod som praktiserats av honom och andra samt förekommer — mer eller mindre konsekvent — i flera läroböcker.

I själva verket är metoden mycket gammal. Enligt ett påpekande i Amer. Math. Monthly förekommer den redan i det 1707 i Paris tryckta posthuma arbetet *Traité analytique des sections coniques* av markisen de L'Hospital (1661—1704). Då det måste vara av visst intresse att se hur räkningarna genomfördes i denna den analytiska geometriens barndom, återges här enligt originalet huvudpunkterna i H:s framställning.

Ett par saker behöva först förtydligas. H. arbetar med koordinatsystem (även snedvinkliga), som endast i teckenfrågan skilja sig från moderna. För honom äro x och y (som bägge kallas ordinator) mått på avstånden till axlarna från den punkt de fastlägga och uppfattas som sträckor, äro alltså aldrig negativa. Detta är en nackdel som kan förorsaka förändringar i byggnaden av en $f(x, y)$, när enligt vår uppfattning $f(x, y)$ förblir, men koordinaterna byta tecken. H. vet väl att utom positiva värden (valeurs vraies) även finnas negativa (valeurs fausses) och att hänsyn måste tagas även till dessa senare, om t. ex. en ekvation skall få sin fullständiga geometriska tolkning, men, sannolikt på grund av de talrika operationerna med oriktade sträckor AB (särskilt analogier efter grekiskt mönster) har han valt ovan nämnda ståndpunkt. Läsningen försvåras av att ekvationer ingå i den fortlöpande texten, där de ofta avbrytas av radslut. Detta har moderniserats.

Standardekvationerna för ellips och hyperbel

Efter att ha definierat ellipsen på vanligt sätt och visat tillhörande trådkonstruktion kommer H. till bifogade figur, där för enkelhets skull de beteckningar och relationer ha samlats som så småningom införts och motiverats i de närmast föregående paragraferna. Sedan får H. ordet, och vi följa hans framställning på sid. 22—23.



Beteckningar:
F, *f* (foyers), *Aa* (premier ou grand Axe) = $=2t=MF+Mf$, *Bb* (second ou petit Axe) = $=2c$, *p* (Parametre) $=2c^2/t$.
C (Centre), $CF=Cf=m$, $CP=x$, $PM=y$, $MF=t-z$, $Mf=t+z$, $FP=m-x$ ou $x-m$, $fP=x+m$.

Sambandet $c^2=t^2-m^2$ har erhållits ur triangeln *FBC*.

Premier cas. Lorsque le point *P* tombe au dessus du centre *C* ... les triangles rectangles *MPF*, *MPf* donnent

$$tt-2tz+zz=yy+mm-2mx+xx,$$

&

$$tt+2tz+zz=yy+mm+2mx+xx.$$

Donc si l'on retranche par ordre chaque membre de la premiere égalité de ceux de la seconde, on aura

$$4tz=4mx;$$

d'où l'on tire

$$z=\frac{mx}{t}.$$

Second cas. Här genomföres samma räkning, när *P* ligger nedanför *C* och $MF=t+z$, vartill förf., som ovan påpekats, tvingas av sin teckenprincip.

COROLLAIRE.

Il est donc évident qu' ... on aura toûjours

$$MF=t-\frac{mx}{t}, \quad \& \quad Mf=t+\frac{mx}{t},$$

lorsque le point P tombe au dessus de centre C; & qu'au contraire on aura

$$MF=t+\frac{mx}{t},\ \&\ Mf=t-\frac{mx}{t},$$

lorsqu'il tombe au dessous.

Detta är det väsentliga i proposition I (sid. 22). Sedan lägges kursen icke direkt mot standardekvationen; först härledes i proposition II (sid. 23) det klassiska

Théorême.

Le quarré d'une ordonnée quelconque MP à l'axe Aa, est au rectangle de AP par Pa, parties de cet axe, comme le quarré de son conjugué Bb, est au quarré de l'axe Aa. Il faut prouver que

$$\overline{PM}^2 \cdot AP \times Pa :: \overline{Bb}^2 \cdot \overline{Aa}^2.$$

(På detta i våra ögon kufiska sätt skrivas analogier genomgående; ändras här nedan.)

Les mêmes choses étant posées que dans l'article précedent, si l'on met dans l'égalité

$$tt \pm 2tz+zz=yy+mm \pm 2mx+xx$$

que l'on a trouvée par le moyen du triangle MPF, à la place de z sa valeur

$$\frac{mx}{t},$$

on formera toûjours celle-ci

$$ttyy=t^4-ttxx-mmtt+mmxx,$$

laquelle étant réduite à une proportion, donne

$$\overline{PM}^2(yy) : AP \times Pa(tt-xx)=\overline{BC}^2(tt-mm) : \overline{CA}^2(tt)=\overline{Bb}^2 : \overline{Aa}^2.$$

Ce qu'il falloit démontrer. (Observera detta sätt att införa termernas värden, som ej längre begagnas.)

Härmed är man realiter framme vid ellipsens ekvation efter praktiskt taget samma räkningar som man gör än i dag. H. går ett steg närmare det moderna skrivsättet genom att i ett »corollaire fondamental» lösa y^2 och få

$$yy=cc-\frac{ccxx}{tt} \text{ ou } yy=\tfrac{1}{2}pt-\frac{pxx}{2t}.$$

Det påpekas ytterligare att axlarna kunna byta roller i ovanstående Théorême och längre fram bevisar H. den redan i antiken kända analoga satsen för två konjugatdiametrar vilka som helst.

H:s härledning av hyperbelns ekvation genomföres på likartat sätt.

Heisenbergs osäkerhetsrelation i gymnasieundervisningen

Av lektor B. Grundström, Djursholm

Partiklar och vågor

Vissa optiska fenomen, såsom ljusets spegling och brytning samt Doppler- och Comptoneffekterna, kan tydas såväl med utgångspunkt från antagandet att ljuset är en vågrörelse som att det är en ström av partiklar, s. k. fotoner eller ljuskvanta. Ljusets dubbla natur, representerad av vågrörelse- och partikelbilden, framträder särskilt tydligt vid undersökningen av den böjningsbild, som uppstår, då ljuset passerar genom en eller flera spalter. I fig. 1 anges schematiskt hur ljuset faller in mot en skärm med spalten S. På plåten A fotograferas den uppkomna böjningsbilden, vars välkända intensitetsfördelning återges genom kurvan till höger i figuren. Bilden består av en starkt exponerad central del och vid sidan av denna svagare bimaxima. Om elektroner och protoner får passera lämpliga avböjningsanordningar, erhålles liknande intensitetsfördelningar.

För tydningen av den uppkomna interferensbilden användes vågrörelseteorien, medan uppkomsten av de fotokemiska processerna i plåtens ljuskänsliga skikt antages förutsätta att ljuset träffar plåten i form av enstaka partiklar. Vi tvingas sålunda att använda både vågrörelse- och partikelbilden på ett och samma objekt. De egenskaper som kännetecknar partikeln, t. ex. dess energi och rörelsemängd, måste vid en matematisk behandling av händelseförloppet sättas i förbindelse med lämpliga karakteristika hos vågen, i detta fall vågrörelsens frekvens och våglängd. Med utgångspunkt från Plancks undersökningar av värmestrålningen visade Einstein år 1905 att den fotoelektriska effekten kunde tydas, om man antog, att fotonens energi E och den till fotonen hörande vågens frekvens ν är förenade genom sambandet

$$E = h\nu$$

Denna ekvation användes sedan länge i fysikundervisningen på realgymnasiet. Begreppet rörelsemängd är numera infört i samma fysikkurs — se Metodiska anvisningar i fysik, S. Ö. 1956: 25, s. 396.

Ur ett föredrag över ämnet »Några enkla ljusböjningsexperiment och deras betydelse för vår uppfattning om orsak och verkan» vid Föreningens för matematisk-naturvetenskaplig undervisning samt Filosofi- och psykologilärarnas förenings årsmöten i jan. 1958.

En fotons rörelsemängd P har samma riktning som dess hastighet c och definieras som kvoten mellan energi och hastighet

$$P=\frac{E}{c}$$

Härav följer $P=h\nu/c=h/\lambda$. Om vi inför vågtalet $\sigma=1/\lambda$, får vi en med energiekvationen symmetrisk relation

$$P=h\sigma$$

Då ljuset passerar spalten, går de flesta fotonerna rakt fram, men många böjer åt sidan. Böjningsbilden ändrar icke karaktär, om bestrålningsintensiteten av spalten varieras. Man har låtit enstaka elektroner passera en avböjningsanordning och inregistrerat deras nedslagspunkter på en plåt. Då tillräckligt många elektroner blivit avböjda och inregistrerade på samma plåt, har man erhållit samma fördelning, som om alla elektroner hade passerat avböjningsanordningen praktiskt taget samtidigt.

Osäkerhetsrelationen

Låt oss nu närmare undersöka sambandet mellan spaltöppningens bredd och böjningsbilden. Om en x-axel i fig. 1 tänkes vara riktad parallellt med spaltskärmen, kan spaltbredden lämpligen betecknas Δx. Läget av första minimum i böjningsbilden antages svara mot en avböjningsvinkel α hos det infallande strålknippets mittstråle. Enligt vågrörelseteorien får vi

$$\lambda=\Delta x\cdot\sin\alpha$$

Om vi i stället betraktar ljuset som en ström av fotoner, kan dessa före passerandet av spalten anses ha en rörelsemängd

$$P=\frac{h}{\lambda}$$

riktad vinkelrätt mot spaltskärmen. Då fotonen passerar spalten, får den en riktningsförändring svarande mot en impuls i sidled, och de fotoner, som därvid avböjes i riktning mot första ljusminimum, får en motsvarande rörelsemängdsförändring

$$\Delta P_x=P\cdot\sin\alpha$$

riktad parallellt med spaltskärmen. Ur de tre sista ekvationerna erhålles sambandet

$$\Delta x\cdot\Delta P_x=h$$

vilket överensstämmer med den av Heisenberg på kvantmekanisk väg härledda osäkerhetsrelationen. Om fotoner medräknas, vilka avböjts längre bort än till första ljusminimet, blir

$$\Delta x\cdot\Delta P_x\geqq h$$

Av Heisenbergsrelationen framgår, att Δx och ΔP_x inte samtidigt kan gå mot noll. Fotonerna är följaktligen så beskaffade, att samhörande värden på läge och rörelsemängd endast kan definieras med den noggrannhet som relationen anger. En osäkerhet Δx beträffande fotonens läge, då den passerar spalten, motsvaras av en osäkerhet ΔP_x i värdet på dess rörelsemängd. Det är därför omöjligt att tillfredsställa den klassiska mekanikens fordringar på exakthet vid beskrivningen av fotonens bana från spalten till fotoplåten. Den

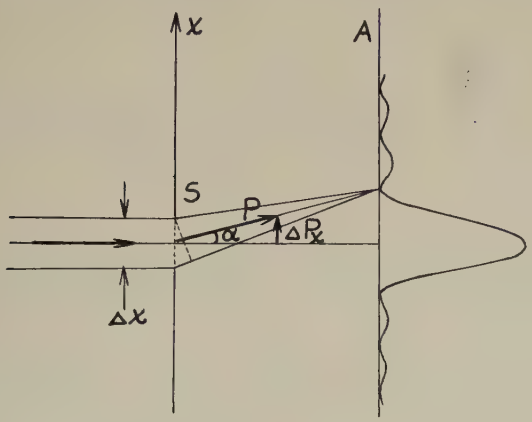


Fig. 1. Ljusböjning i en spalt. ΔP_x är förändringen av en fotons rörelsemängd P, då fotonen passerar en spalt med bredden Δx.

varierande intensiteten hos böjningsbildens olika delar kan uppfattas som ett mått på sannolikheten för att en foton skall träffa skärmen i en viss utvald punkt, men vi kan inte exakt förutsäga var en enskild foton träffar skärmen.

Samma osäkerhet beträffande läge och rörelsemängd vidlåder givetvis även alla materiella partiklar, stora som små, men eftersom partiklarnas rörelsemängd är produkten av deras massa och hastighet, blir oskärpan i partikelhastigheten väsentlig först då det gäller atomära partiklar. Om man exempelvis antager, att en elektrons läge kan avgränsas till ett område motsvarande en atomdiameter, 10^{-9} cm, får oskärpan i hastigheten det enorma värdet $7 \cdot 10^{9}$ cm/s, vilket betyder, att hastigheten måste betraktas som okänd. Angivandet av tyngdpunktens läge med en noggrannhet av 1 μ hos ett hagelkorn, som väger 1 g, medför däremot en osäkerhet i hastigheten av endast $7 \cdot 10^{-28}$ cm/s, som helt kan försummas.

Ljusböjning i en enkel spalt

Ur skolpedagogisk synpunkt är det av värde, att man på experimentell väg med enkla medel kan åskådliggöra innebörden av Heisenbergsrelationen. Försöket är ett vanligt ljusböjningsexperiment, anordnat enl. fig. 2. Den positiva spetsen av en kolbåge avbildas noggrant på en spalt S_1, den s. k. belysningsspalten, med hjälp av en kondensorlins K och en positiv hjälplins L_1 med ungefär 15 cm brännvidd. Linsen L_2 har ungefär samma brännvidd som L_1 och avbildar belysningsspalten skarpt på den snedställda skärmen A. Slutligen inskjutes avböjningsspalten S_2 mellan S_1 och L_2. Om strålgången

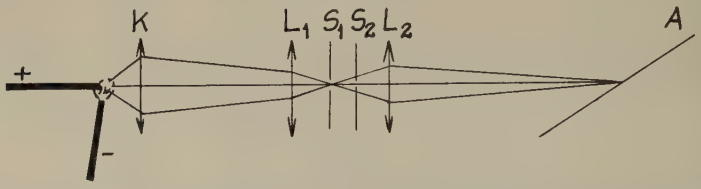


Fig. 2. Strålgång vid ljusböjning i en spalt. Kondensorn K och linsen L_1 samlar ljuset från en kolbåge på belysningsspalten S_1, som sedan avbildas på skärmen A med hjälp av linsen L_2. S_2 är böjningsspalten.

är noga centrerad, erhålles en över hela klassen fullt tydlig böjningsbild på skärmen i överensstämmelse med fig. 3 a. Kolbågen bör drivas med 5 amp, och smala kol bör användas. Avståndet mellan ljuskällan och skärmen är ungefär 2 m. Med liten bredd hos böjningsspalten, svarande mot liten oskärpa Δx hos fotonernas lägen, blir böjningsbilden bred, vilket betyder relativt stor osäkerhet ΔP_x i värdet på fotonernas rörelsemängd. Med ökande spaltvidd, dvs. växande lägesosäkerhet, drar sig böjningsbilden samman, svarande mot en minskning av rörelsemängdsosäkerheten.

Vid bedömningen av de atomära partiklarnas egenskaper kan man enligt Heisenberg och Bohr icke draga någon gräns mellan objekten själva och deras växelverkan med den försöksapparatur, med vilken vi undersöker den. Den försöksanordning med vilken vi vill fastställa läget är sådan att den omöjliggör en samtidig bestämning av hastigheten och tvärt om. Egenskaper, som för sin undersökning kräver varandra uteslutande försöksanordningar, kallar Bohr komplementära. Exempel på dylika egenskaper är förutom läge och rörelsemängd även energi och tid.

Följande välkända exempel på komplementära försöksanordningar kan lämpligen anföras i undervisningen. Om man vill försöka iaktta läget av en elektron genom att belysa den, måste ljus med kort våglängd användas. En parallell härtill är det kända förhållandet,

att en liten kobbe, som nätt och jämnt sticker upp ovan vattenytan, lämnar långa dyningsvågor praktiskt taget opåverkade, då dessa går fram över kobben. Vi kan därför icke genom att enbart iakttaga de långa vågorna draga några säkra slutsatser om kobbens läge. Korta vågor spridas däremot kraftigt av kobben och genom att observera de runt kobben spridda vågorna kan dennas läge lokaliseras. För elektronernas del behövs det ljus med röntgenvåglängd. Dessa vågor är dock så energirika att elektronen får en stöt, som är så kraftig, att dess hastighet blir okontrollerbar. Om vi omvänt vill bevara elektronens hastighet, måste så långvågigt ljus användas, att läget ej kan observeras. Bohr framhåller, att den fundamentala skillnaden mellan klassisk fysik och atomfysik med hänsyn till undersökningen av de fysikaliska fenomenen består däri, att man i första fallet kan bortse från växelverkan mellan objekten och mätinstrumenten, medan denna växelverkan i andra fallet är en integrerande del av fenomenet.

Frågan om partiklars framtida öden vid passerandet av en avböjningsanordning är av statistisk natur. Men statistiska fördelningar uppträder även i andra sammanhang än rent atomära. I stället för att beskjuta en spalt med fotoner, kan vi låta en skytt rikta sitt gevär mot en smal vertikal springa i ett plank. Han skall hålla geväret strax framför springan och skjuta i en bestämd riktning, t. ex. vinkelrätt mot planket. Skotten skall avlossas i olika höjdlägen, så att varje cm av springan passeras av ett stort antal skott. Några tiotal meter bakom planket är en måltavla placerad. Träffbilden visar sig efter ett tillräckligt stort antal skott stämma överens med den centrala delen av fotonernas svärtning på den fotografiska plåten, men skyttens träffbild uppvisar inga bimaxima vid sidan av huvudmaxima. Redan detta är ett tecken på att de atomära partiklarna har andra egenskaper än vanliga småpartiklar, kulor, tennisbollar o. dyl. Orsakerna till den statistiska fördelningen är i grunden olika i de två fallen. Det kan inte anses vara principiellt omöjligt — fastän givetvis praktiskt outförbart — att få reda på alla de tillfälliga faktorer, som bestämmer ett enskilt skotts bana från skytten till måltavlan, men då det gäller fotonernas banor, är detta enligt Heisenbergsrelationen i princip omöjligt. Sannolikheten är en grundegenskap hos de atomära partiklarna, men hos de vanliga småpartiklarna beror sannolikheten på yttre faktorer. Vi kan i detta sammanhang givetvis helt bortse från den obestämdhet som enligt Heisenberg vidlåder alla partiklar, stora som små, ty denna är, såsom ovan anfördes, så försvinnande liten då det gäller kulbanor, att den saknar betydelse för uppkomsten av skyttens träffbild. Vi har sålunda anledning att räkna med tre slags försöksanordningar, sådana som är praktiskt utförbara, principiellt utförbara och i princip outförbara.

Ljusböjning i en dubbelspalt

De atomära partiklarnas säregna sannolikhetsegenskaper framträder i kanske ännu mera drastisk form vid avböjningsförsök med dubbelspalt, varmed menas två parallella, tätt invid varandra belägna springor i en skärm (Youngs försök). Dubbelspalten kan framställas på följande sätt. En kraftigt exponerad fotografisk plåt framkallas till jämn och full svärta. Med hjälp av ett dragstift (utan tusch) ritsas två parallella fina linjer i emulsionsskiktet. Dragstiftets båda skänklar

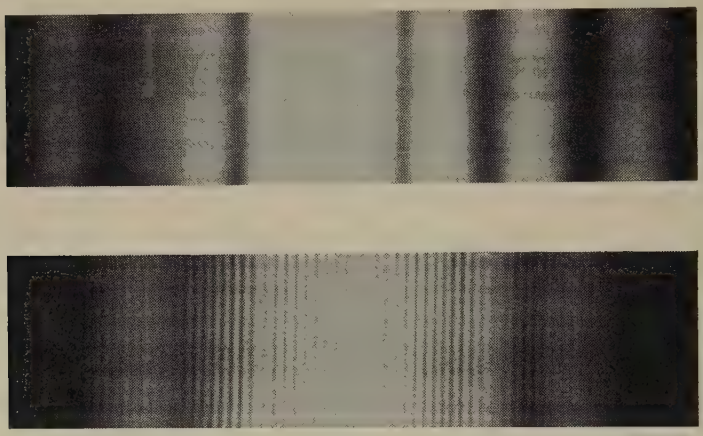


Fig. 3. Fotografier av ljusböjningsbilder.
a. Enkel spalt. b. Dubbel spalt.

måste fixeras stadigt i förhållande till varandra. Avståndet mellan linjerna bör vara ungefär 0,2 mm. Anordningens ljusstyrka kan ökas flera gånger, om man ritsar flera parallella dubbellinjer på samma plåt, så som fig. 4 visar. I de enskilda dubbelspalterna skall linjeavståndet naturligtvis vara lika, men avståndet mellan två på varandra följande dubbelspalter skall variera oregelbundet. Den enkla böjningsspalten S_2 i fig. 2 utbytes nu mot en skärm med några dubbelspalter. Med den i figuren angivna linsuppställningen kommer böjningen i alla böjningsspalterna att samverka, ty bildläget på skärmen A är oberoende av en förflyttning i sidled av en böjningsspalt, eftersom linsen L_2 avbildar belysningsspalten S_1 på skärmen A. Man kan naturligtvis öka ljusstyrkan vid böjningsförsöket med enkelspalten genom att ritsa ett flertal parallella och icke ekvidistanta linjer i den helsvarta fotoemulsionen, men man mister då möjligheten att kontinuerligt variera spaltbredden.

Den bild, som nu uppstår på skärmen, se fig. 3 b, uppvisar den likheten med enkelspaltens böjningsbild i fig. 3 a att den består av ett centralt huvudmaximum och svagare bimaxima, men dessa maxima är hos dubbelspaltens böjningsbild uppdelade i ljusa och mörka strimmor. Läget av dessa strimmor kan på vanligt sätt tydas med hjälp av vågteorien.

Ljusböjningsexperiment med dubbelspalt har visat sig vara av stort intresse och anföres ofta i den fysikaliska litteraturen, detta gäller i synnerhet försök, där de båda spaltöppningarna belyses växelvis. Experimentet kan utföras på följande sätt. En enkel dubbelspalt med

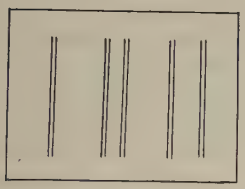


Fig. 4. Fem dubbelspalter med varierande avstånd.

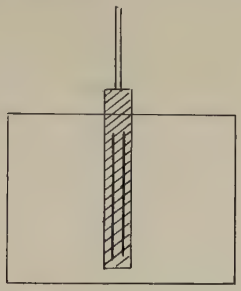


Fig. 5. Bländaranordning vid en dubbelspalt. Bländaren är fastgjord vid kläppen till en ringklocka.

ett spaltavstånd på ungefär 0,8 mm placeras på spektroskopbordet till ett enkelt spektroskop för skolbruk. Kikarokularet utbytes mot en kamera, så att böjningsbilden i kikarobjektivets brännplan kan fotograferas. Kollimatorlinsen belyses med natriumljus. Vi gör nu två olika försök. I det första försöket övertäckes först den ena spalten så att ljuset endast kan passera genom den andra, därpå övertäckes den andra spalten så att endast den första blir belyst. Sedan framkallas plåten. I det andra försöket belyses båda spalterna samtidigt, varefter plåten framkallas. De så erhållna bilderna stämmer helt överens med fotografierna i fig. 3 a resp. 3 b. Försökens betydelse ligger däri, att svärtningen på plåten, då spalterna belyses samtidigt, inte är en enkel addition av vardera spaltens inverkan eller någon slags dubbelexponering av vardera spaltens böjningsbild. Man kan lätt välja ut en punkt på den fotografiska plåten, som svärtas i det ena och förblir osvärtat i det andra försöket.

Försöket kan även utföras visuellt. Kameran borttages och kikarokularet skruvas fast. Strax intill dubbelspalten placeras en på kläppen till en ringklocka monterad långsmal, rektangulär bländare, av samma

längd som dubbelspalten och med en bredd, som väl täcker de båda spaltöppningarna, se fig. 5. Då bländaren är i vila, kommer intet ljus fram genom spalterna. Genom ett i serie med ringklockan inkopplat motstånd regleras bländarens utslag så, att spalterna belyses växelvis. Sedan ökas utslaget, så att spalterna under större delen av svängningsperioden belyses samtidigt. Man kan då bekvämt iakttaga, hur böjningsbilden ändrar utseende från fall a till fall b i fig. 3.

Om vi här skulle försöka tyda förloppet från extrem partikelsynpunkt, skulle vi komma till det ohållbara resultatet, att det sätt, på vilket en foton passerar den ena spalten, skulle bero på, om den andra spalten är öppen eller ej. Ljusets vågnatur möjliggör däremot en enkel förklaring. Svärtningens intensitet i en viss punkt, som också kan uppfattas som ett mått på sannolikheten för att en foton skall träffa punkten i fråga, är enligt vågteorien proportionell mot kvadraten på vågens amplitud i denna punkt. De från vardera spalten kommande vågorna antages i punkten ha amplituderna E_1 resp. E_2. Om spalten öppnas växelvis, blir den totala intensiteten $E_1^2+E_2^2$, dvs. en ren addition av vardera spaltens inverkan, men då spalterna är öppna samtidigt, blir den totala intensiteten $(E_1+E_2)^2$, vilken antager värdet noll, då $E_1=-E_2$.

Helt annorlunda utfaller resultatet av en serie skott genom två parallella springor i ett plank. Två skyttar får under lika betingelser skjuta genom var sin springa. De beordras att rikta gevären så att de under ideala geometriska förhållanden skulle träffa prick utmed samma räta linje på måltavlan bakom planket. I verkligheten blir det givetvis icke så. Om skyttarna antages vara behäftade med samma systematiska fel och i övrigt är lika skickliga, kommer skotten att fördelas utmed en träffbild, som ser likadan ut, oavsett om först den ene och sedan den andre skjuter eller om båda skjuter samtidigt. Vi får i båda fallen en träffbild, som är uppbyggd genom en enkel addition av inverkan av skott genom vardera springan. Spridningsbilden kommer att bestå av ett huvudmaximum utan finstruktur.

Har man tillgång till en sändare och mottagare av elektromagnetiska mikrovågor samt förstärkare, kan vackra och övertygande avböjningsförsök utföras med ett minimum av arbete. Detsamma gäller i viss mån även beträffande försök med vattenvågor.

Orsak och verkan

Heisenbergsrelationen har fått betydelse för vår uppfattning om orsak och verkan. För att kunna avgöra om av en viss orsak följer en bestämd verkan, måste man först känna orsaken, och för att kunna bestämma en partikels framtida läge, måste man känna dess läge och hastighet nu. I den klassiska mekaniken antog man, att det

i princip var möjligt att få sådana upplysningar med vilken som helst grad av noggrannhet. Härpå grundades 1800-talets determinism. I atomfysiken har man visat, att de atomära partiklarna icke har sådana egenskaper. Vi måste i stället som orsak använda dessa partiklars egenskaper så, som dessa är fastlagda genom Heisenbergsrelationen, och då måste vi konstatera, att en analys av det framtida skeendet enligt det klassiska kausalitetsidealet är principiellt ogenomförbart. Skillnaden mellan klassisk och modern fysik är då den, att man i den klassiska fysiken trodde sig kunna formulera entydiga orsakssammanhang gällande för alla situationer, medan den moderna fysiken har visat, att atomära partiklars framtid endast kan förutsägas med en viss grad av sannolikhet. Den klassiska fysikens teorier är idealisationer, som äger giltighet för sådana fenomen, då Plancks verkningskvantum h kan försummas.

Atomfysikens radikala avståndstagande från tidigare invanda betraktelsesätt och i synnerhet dess avkall på kravet om en deterministisk händelsebeskrivning har kommit många fysiker och filosofer att tvivla på, om atomfysikens och särskilt kvantmekanikens beskrivning av ifrågavarande fenomen kan anses vara oåterkallelig, eller om den endast är en tillfällig utväg ur svårigheterna. Denna frågeställning har utgjort temat för en under många år pågående diskussion mellan Einstein och Bohr. I ett arbete från 1935 »Kan den kvantmekaniska beskrivningen av den fysikaliska verkligheten betraktas som fullständig» intar Einstein en kritisk hållning gentemot kvantmekaniken. I en år 1949 publicerad uppsats »Erkendelsesteoretiske Problemer i Atomfysikken» har Bohr skildrat några av Einsteins sinnrika förslag till försöksanordningar, vilka åtminstone i princip skulle kunna ge en mer uttömmande beskrivning av atomära processer, men som på grund av objektens komplementära egenskaper icke kan realiseras.

Litteratur

Niels Bohr, Atomfysik og menneskelig Erkendelse. Köpenhamn, 1957.
Werner Heisenberg, Das Naturbild der heutigen Physik. Hamburg, 1957.
Oskar Höfling, Lehrbuch der Physik. Oberstufe, Ausgabe A. Bonn, 1957.
Oskar Klein, Orsak och verkan i den nya atomteoriens belysning. Stockholm, 1935. — Från klassisk fysik till kvantteori. Stockholm, 1952.
E. W. Schpolski, Atomphysik. I. Berlin, 1954.
R. E. Peierls, The Laws of Nature. London, 1955.

Tröghetskrafter i skolfysiken

Av lektor Erik Walles, Falun

För eller emot tröghetskrafter i gymnasiets fysikkurs — meningarna torde alltjämt vara delade. Två omständigheter, som tala till förmån för införandet av tröghetskrafter, förefalla dock värda att beakta: dels elevernas intuitiva eller på erfarenhet grundade insikt om något slags extra kraft i ett accelererat system, dels termen centrifugalkraft, som tillhör det gängse ordförrådet utan att man i allmänhet har gjort sig reda för vad man menar därmed. Det synes angeläget att en realstudent har vunnit eller åtminstone haft tillfälle att vinna klarhet i dessa ting.

Att en ordentlig redogörelse för tröghetskrafterna måste grunda sig på betraktelser över relativ rörelse är givet. Redan av det skälet måste den komma rätt långt fram i dynamikkursen. Eleverna böra ju också ha hunnit bli förtrogna med mekanikens grunder, innan dessa ganska svåra frågor behandlas.

Saken kan framställas ungefär sålunda. Man tänker sig en långsträckt järnvägsvagn A (fig. 1), själv på översidan försedd med spår, på vilket en mindre vagn B med massan m kan rulla friktionsfritt. Vagnen A sättes i rörelse åt vänster med likformig acceleration a. Händelseförloppet tänkes studerat dels av en iakttagare »på marken», dels av en iakttagare, som medföljer den accelererade vagnen A. (Experiment till belysning av det följande äro lätta att utföra.)

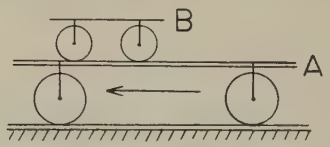


Fig. 1.

Sett från marken	Sett från vagnen A
Iakttagelse: B står stilla.	Iakttagelse: B rör sig åt höger med acc. a.
Slutsats: På B verkar ingen (horisontell) kraft.	Slutsats: På B verkar en kraft $=ma$ åt höger.
	Denna kraft kallas *tröghetskraft*.

Om vagnen B är fastspänd vid A med en horisontell dynamometer, får man i stället följande schema. (Fig. 2.)

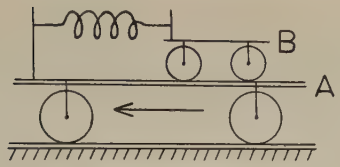


Fig. 2.

Sett från marken

Iakttagelse: B rör sig åt vänster med acc. *a*. På B verkar dynamometern åt vänster med en kraft=*ma*.

Slutsats: Ingen annan kraft verkar på *B*.

Sett från vagnen A

Iakttagelse: B är i jämvikt. På B verkar dynamometern åt vänster med en kraft=*ma*.

Slutsats: På B verkar också en kraft=*ma* åt höger.

Definition: En tröghetskraft är en kraft, som uppträder i ett accelererat system.

Här kanske man skulle kunna sätta punkt för behandlingen av tröghetskrafter vid translation. Men man vinner i flera avseenden, om man fördjupar åskådningen genom att införa det fiktiva tyngdkraftfältet. För detta ändamål finns väl intet bättre medel än »Einsteins låda» (se Einsteins populära bok »Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie»). Denna tänkta rymdfarkost utan drivmedel och långt från alla massor är bebodd av en intelligent varelse försedd med laborationsmöjligheter. Han svävar omkring i det tyngdlösa tillståndet tills en demon i rymden utanför fäster ett rep i farkosten och börjar draga med konstant kraft. Den likformiga acceleration, som farkosten då erhåller, åstadkommer nya mekaniska förhållanden därinne. Dessa tolkas av passageraren så, att hans låda blivit fast upphängd i ett homogent tyngdkraftfält. Alla mekaniska experiment han utför bekräfta detta. En kropp, som släppes (och alltså upphör att deltaga i farkostens acceleration), faller med accelererad hastighet mot golvet.

En likformig acceleration är ekvivalent med ett motsatt riktat tyngdkraftfält av samma storlek (ekvivalensprincipen).

Den skenbara tyngden hos en kropp i farkosten är ju i verkligheten en tröghetskraft. Och då det fiktiva tyngdkraftfältet är homogent (liksom jordens förutsättes vara), så inser man att tröghetskraften vid ren translation angriper i tyngdpunkten. Utförligare motiveras detta med en hänvisning till det faktum, att alla masselement i en utsträckt kropp påverkas av lika stora och lika riktade tröghetskrafter.

Det vid accelerationen uppkommande, fiktiva tyngdkraftfältet sammansätter sig vektoriellt med det ordinarie tyngdkraftfältet. Man får en ny *effektiv lodlinje*. Den effektiva lodlinjen kan demonstreras genom »Prytz' lyktförsök». En fotogenlykta med glas upphänges som en pendel och får svänga. I ytterlägena, där accelerationen går längs bantangenten, kommer den effektiva lodlinjen att vara riktad nedåt-utåt (från jämviktsläget). Lågan, som i vila är riktad uppåt, kommer här att orienteras uppåt-inåt. — Ett enklare och renare försök, som kan göras under någon skolutfärd, är följande. I en järnvägsvagn (spårvagn, buss) hänger man i taket en pendel och binder i något annat fäste en vätgasfylld ballong. När vagnen sätter i gång framåt, rör sig pendelkulan bakåt, medan ballongen däremot rör sig framåt. Både pendeltråden och ballongsnöret sträva mot den nya lodlinjen.

Den effektiva lodlinjen är ett behändigt instrument i flera fall, t. ex. när jordens avplattning skall förklaras. Många problem lösas synnerligen enkelt med den. Men eleverna böra naturligtvis behärska det kinetiska betraktelsesättet — mången lärare torde med fog anse att detta bör vara det normala. Lämpligen löser man några problem på båda sätten. Sedan eleverna sålunda blivit övertygade om den principiella likvärdigheten av de båda metoderna, kan man nöja sig med den statiska enbart, om denna medger en enklare behandling.

Ett föga verklighetsbetonat problem må tjäna som exempel på behandling enligt båda metoderna:

I taket av en järnvägsvagn är en pendel upphängd. Tåget rör sig på en horisontell raksträcka med den konstanta hastigheten 90 km/tim. Det bromsas nu med en konstant bromskraft, varvid pendeln bildar vinkeln 4,8° med sin föregående riktning. Beräkna bromssträckan.

Kinetiskt betraktelsesätt
(rörelsen studerad från banvallen)

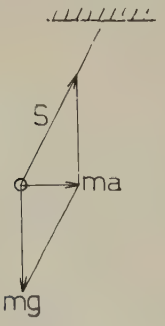


Fig. 3.

Statiskt betraktelsesätt
(rörelsen studerad inne i vagnen)

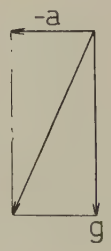


Fig. 4.

På pendelkulan (massa m) verka två krafter, tyngden mg och sträckkraften i snöret. Deras resultant är horisontell, ty den är ansvarig för kulans mot rörelsen riktade acceleration. Den accelererande kraften är då $=mg \cdot \text{tg } 4{,}8°$. Osv.

Pendeln är i jämvikt. Den effektiva lodlinjen bildar 4,8° med den ordinarie. Det fiktiva tyngdkraftfältet a är riktat *mot* vagnens acceleration, dvs. *med* rörelsen. För tyngdkraftfälten får man vektordiagrammet i fig 4. Härav beräknas vagnens acceleration $-a=-g \cdot \text{tg } 4{,}8°$. Osv.

Ett studentproblem (givet jan. 41) handlar om en fritt fallande kula i en likformigt retarderad buss; nedslagspunkten skall bestämmas. »Statiskt» betraktelsesätt ger en mycket enkel lösning: i det accelererade systemet rör sig kulan rätlinigt längs den effektiva lodlinjen.

För att introducera tröghetskrafterna vid rotation kan man tänka sig en plan och glatt, horisontell skiva, som roterar likformigt kring en vertikal axel. (Sådana skivor finnas som bekant på en del nöjesfält.) En partikel lossnar från skivans yta, och dess fortsatta rörelse studeras, dels »från marken», dels av en iakttagare (enklast vid axeln), som deltager i rotationen.

Från marken	Från skivan
Iakttagelse: Partikeln rör sig rätlinigt med konstant hastighet.	Iakttagelse: Partikeln rör sig (åtminstone i början) rakt ut från axeln med likformigt accelererad hastighet.
Slutsats: På partikeln verkar ingen (horisontell) kraft.	Slutsats: På partikeln verkar en utåtriktad kraft (*centrifugalkraft*).

Är partikeln däremot fäst (t. ex. vid axeln) med en dynamometer, erhålles följande schema:

Från marken	Från skivan
Iakttagelse: Partikeln utför centralrörelse med accelerationen v^2/r in mot axeln. Dynamometern verkar med kraften $F=mv/^2r$ på partikeln in mot axeln (centripetalkraften).	Iakttagelse: Partikeln är i jämvikt. Dynamometern verkar på partikeln med kraften F in mot axeln.
Slutsats: Ingen annan kraft verkar på partikeln.	Slutsats: På partikeln verkar också en kraft F ut från axeln (centrifugalkraften).

Det fiktiva tyngdkraftfältet vid likformig rotation är överallt riktat utåt från axeln, och dess intensitet är proportionell mot avståndet till axeln. Från punkt till punkt varierar det alltså både i fråga om riktning och styrka. Då kraftfältet sålunda icke är homogent, kan man icke vänta sig att tröghetskraftens anbringningspunkt i en utsträckt kropp skall sammanfalla med massmedelpunkten.

Till sist ett studentproblem på centralrörelse (givet jan. 53), där lösningen i hög grad förenklas genom statiskt betraktelsesätt.

»En landsväg har på ett ställe en kurva med 150 m krökningsradie. Vägbanan är i kurvan gjord lutande, så att tryckkraften från fordon, som passera med hastigheten 40 km/tim. är vinkelrät mot banan. Be-

räkna den största hastighet, med vilken en bil kan passera kurvan utan att sladda, om friktionskoefficienten mellan hjulen och vägbanan därvid uppskattas till 0,20. Bilens tyngdpunkt får anses ligga så lågt, att ingen risk för stjälpning föreligger.»

Man observerar, att tröghetskraften förutsättes angripa i tyngdpunkten. Detta är ju approximativt riktigt, då bilens utsträckning är liten i förhållande till radien och det fiktiva tyngdkraftfältet kan anses homogent inom ett område av denna storlek. Utan en sådan approximation kan problemet naturligtvis inte lösas.

Bilen studeras i ett koordinatsystem, som roterar kring en vertikal axeln genom landsvägens medelpunkt med sådan hastighet, att bilen befinner sig i vila i förhållande till systemet. Det accelererade systemet motsvaras då icke av något konkret föremål såsom en vagn eller dylikt, och det statiska betraktelsesättet ställer här något större krav på abstraktionsförmåga.

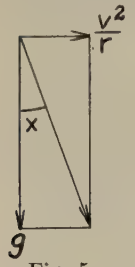


Fig. 5.

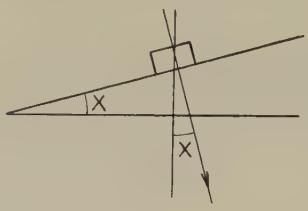


Fig. 6.

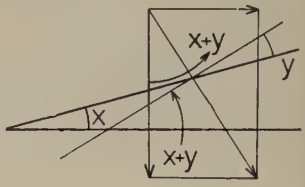


Fig. 7.

Uppgiften om tryckkraftens riktning vid den lägre hastigheten medger beräkning av vägbanans lutning. Vägbanan är vinkelrät mot den effektiva lodlinjen, vars vinkel med den ordinarie kallas x. (Fig. 5, 6.)

Ur $v=100/9$ m/sek, $r=150$ m, erhålles $v^2/r=10^4/81 \cdot 150$ m/sek^2 och tg $x=v^2/rg=10^4/81 \cdot 150 \cdot 9{,}81$; $x=4{,}80°$.

Vid den högre hastigheten är den effektiva lodlinjen ännu snedare, så att vägbanan i förhållande till den lutar u t å t, och denna lutning är lika med friktionsvinkeln y (Fig. 7); tg $y=0{,}20$; $y=11{,}31°$.

Vinkeln mellan den effektiva och den ordinarie lodlinjen är alltså $x+y=4{,}80°+11{,}31°=16{,}11°$. Om den sökta hastigheten är u m/sek, gäller liksom förut $\frac{1}{150}\, u^2/g=$tg $16{,}11°$, varav u beräknas.

Litteratur

M. Sjöström, Elementa *37* (1954), 179—181.
T. Ljunggren, Elementa *38* (1955), 253—259.
O. Lindstad, Elementa *39* (1956), 261—264.
O. Lindstad, Veiledning i mekanikk. Norsk Lektorlag, Oslo 1946, 36—44.
R. W. Pohl, Einführung in die Mechanik und Akustik. Springer, Berlin 1930, 100—115.

Centralrörelse

Av lektor Aarre Saarnio, Forssa, Finland

Med nedan beskrivna apparat kan man 1) erhålla en cirkulär likformig rörelse 2) visa att vid dylik rörelse en lösgjord kropp fortsätter i bantangentens riktning 3) bestämma centripetalkraften.

I en ca 1 m hög träram (fig. 1 a) fastgöres en spiralfjäder med ca 3—5 mm diameter. Spiralen sträckes, så att slingorna får en höjd av 3—4 mm, utom på mitten där några varv får bilda ett tätare parti.

1. Cirkulär likformig rörelse. I ena änden av en stång (cykeleker) fastsättes en pingpongboll och i den andra en blyvikt

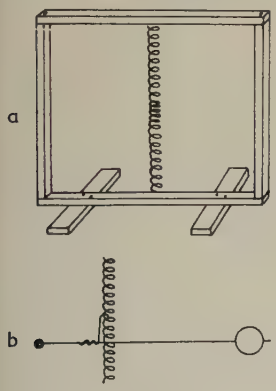


Fig. 1.

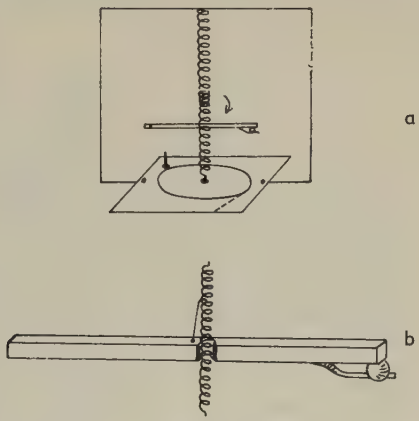


Fig. 2.

(fig. 1 b). I tyngdpunkten av den så belastade stången fästes en krok av mässing, och med hjälp av denna hänges stången på spiralen (fig. 1 a). Samtidigt som stången glider sakta nedåt kommer den i roterande rörelse. Bollens bana blir spiralformig, men på grund av slingornas ringa stigning blir den praktiskt taget cirkulär. På grund av motstånden blir rörelsen likformig. Antal omlopp och motsvarande tider blir proportionella, t. ex. $n_1 = 12$, $t_1 = 21{,}2$ sek och $n_2 = 8$, $t_2 = 14{,}2$ sek, varav $n_1/n_2 = 1{,}50$ och $t_1/t_2 = 1{,}49$. Mätningarna kan ske noggrant, då rörelsen är långsam och varar länge.

2. Bantangenten. I ena änden av en ca 30 cm lång trästav fästes en bit av en fjäder till ett väckarur, så att en stålkula kan spännas

fast mellan staven och fjädern (fig. 2 b). I stavens tyngdpunkt göres en fördjupning för spiralfjädern, och staven förses med en krok som i fig. 1 b. Under träramen (fig. 2 a) placeras en svart pappskiva, på vilken man med krita uppritat projektionen av kulans omloppsbana. Kulan rullas i lykopodiumpulver och fastspännes vid staven. Denna upphänges ganska nära pappskivan. Rörelsen stoppas av en på skivan anbragt skruv, varvid kulan lossnar och rullar längs skivan i cirkeltangentens riktning.

3. Centrifugalkraften. I ändarna av en trästav (30 cm) fästes ca 15 cm långa pendlar med kulor av 50 grams vikt (fig. 3). En fördjupning för spiralfjädern göres i stavens mitt och vid dess ena ände

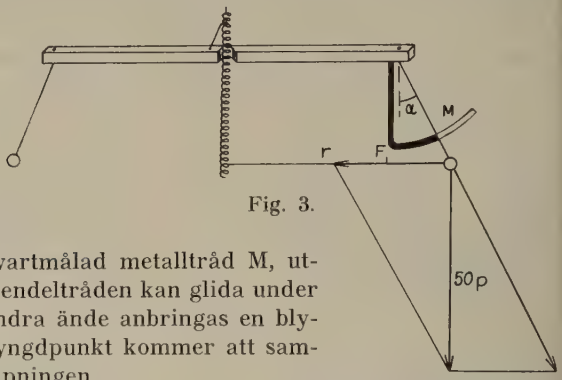


Fig. 3.

fastsättes en böjd, svartmålad metalltråd M, utmed vilken den ena pendeltråden kan glida under försöket. I stavens andra ände anbringas en blyvikt, så att stavens tyngdpunkt kommer att sammanfalla med fördjupningen.

Tråden M överdrages med lykopodium och staven hänges på spiralens övre del. När den närmar sig mitten — där den stoppas av de tätt liggande trådarna — bestämmes omloppstiden T. Från M har pendeltråden lösgjort lykopodiumpulver, och den mot T svarande utslagsvinkeln α kan skarpt avläsas.

Staven lyftes försiktigt och fästes med tape på klasstavlan. En kraftparallellogram konstrueras (fig. 3) och centripetalkomponenten F_1 bestämmes genom mätning.

Det på detta sätt grafiskt erhållna värdet på centripetalkraften jämföres med det ur formeln $F = 4\pi^2 mr/T^2$ beräknade.

Vid ett försök erhölls grafiskt $F_1 = 20{,}0$ pond (gf). Genom beräkning ur de observerade värdena: $m = 50$ g; $T = 1{,}6$ s; $r = 26{,}5$ cm erhålles $F = 20{,}7$ pond.

Här beskrivna försök demonstrerades vid den tredje nordiska kongressen för lärare i matematik, fysik och kemi i Stockholm sommaren 1957. Den som ej själv vill göra apparaterna kan sätta sig i förbindelse med författaren.

Modeller för kemiundervisningen

Av lektor Arvid Hedelius, Stockholm

För en åskådlig undervisning i kemi äro modeller av molekyler och kristaller av stort värde. Här ges några anvisningar att framställa sådana.

Ett enkelt och näraliggande sätt att erhålla molekylmodeller är att köpa en färdig sats s. k. atomkalotter och sammanfoga dessa enligt medföljande anvisningar. En någorlunda komplicerad molekyl, t. ex. stärkelse, fordrar emellertid en sats med många delar, vilket ställer sig tämligen dyrbart. En på detta sätt framställd modell blir emellertid dessutom inte så lätt att demonstrera inför en klass. Man måste se den på nära håll. En begränsning av kalotternas användning bör framhållas: man kan inte göra jongittermodeller med dem.

Fig. 1. Is Iα. Stabil: $0° > t > -8°$. Skala 1 : 4.

Ett annat sätt är att skaffa ett antal kulor av trä eller kork. Träkulornas sammanfogning förutsätter hål i kulorna och lämpliga länkar. Denna typ av utrustning är en förelöpare till de ovannämnda kalotterna. Men väljer man kulor av kork kan man sammanfoga dem med nålar, som fästas där de för tillfället passa. Med detta material bygger man inför klassen modeller, i vilka atomernas platser i förhållande till varandra tydligt framträda. Naturligtvis får man då ge efter på kraven på riktigheten i vissa andra avseenden. Kulorna visa huvudsakligen läget av atomcentra och olika typer av gitter kunna nu lätt demonstreras. En sådan isärdragen modell kan klassen uppfatta.

Ännu ett sätt är, att man färdigställer ett antal permanenta modeller, i regel av den isärdragna typen. Som exempel bland det tjugotal dylika jag disponerar kan jag taga de båda här avbildade. Kulorna äro av papper med 2 resp. 3 cm diameter och kosta 2 resp. 6 öre per styck.[1] De äro efter genomborrning uppträdda på pinnar av 1,5 mm s. k. silverstål, som stuckits fast i borrade hål i en tjock lamellträplatta. Ismodellen (fig. 1) är bl. a. mycket användbar för att förklara vattnets volymsökning vid övergång till is, samt för att klargöra begreppet

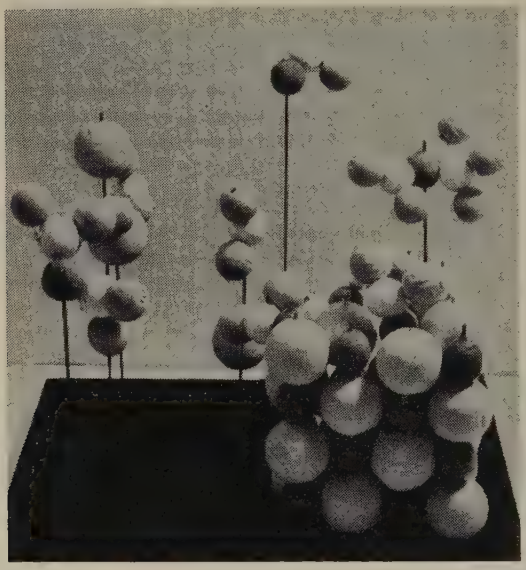


Fig. 2. En koksaltkristall löses i vatten. Skala 1 : 3.

vätebindning. Den andra modellen (fig. 2) visar en koksaltkristalls upplösning i vatten. Där ha kulorna skjutits samman till en kompakt kristallmodell, kring vilken vattenmolekyler sväva. Några joner ha lossnat, gått i lösning, med sina vattenhöljen. Redan för elever i klass 4^5 är denna modell av klargörande värde.

I min undervisning har jag funnit det ändamålsenligt att använda alla tre modelltyperna. Vilken som vid varje tillfälle väljes beror på vad som skall demonstreras och vilken åldersgrupp av elever det gäller.

[1] Kulorna, som finnas i olika färger, kunna köpas hos Dekorationsbyrå E. Kortegast, Surbrunnsg. 50, Stockholm Va.

Framställning av klordioxid för blekning av pappersmassa

Av civilingenjör K. Eriksson, Härnösand

Klordioxid är vid rumstemperatur en rödgul, monomolekylär gas, som är mycket explosiv i hög koncentration. Om klordioxidens partialtryck är mindre än $^1/_{10}$ av totaltrycket, så är risken för explosion mycket liten. Klordioxid reagerar inte med vatten utan löses som ClO_2. Utspädda lösningar av klordioxid i vatten medför inga nämnvärda risker. Risken för förgiftning undviks genom god ventilation och genom att man om möjligt arbetar med kärl under vakuum. Klordioxid förstör många organiska ämnen och används därför vid vattenrening för avlägsnande av lukt och smak. Den används dock huvudsakligen för slutblekning av pappersmassa, emedan den förstör kvarvarande lignin och färgämnen under mycket liten nedbrytning av cellulosa, varför man kan bleka sulfatmassa till hög vithet utan nämnvärd förlust i styrka. Klor är vanlig förorening i klordioxidlösning, som erhålls vid tillverkningen. Detta har emellertid ingen praktisk betydelse, eftersom även klor bleker.

I stort sett finns tre slag av kemiska reaktioner, genom vilka klordioxid kan framställas, nämligen reduktion av klorat, oxidation av kloriter och direkt oxidation av klor. Här skall i korthet beskrivas två metoder, som används fabriksmässigt i Sverige och som skribenten varit i tillfälle att studera i Skutskär och Husum. Enligt dessa metoder reducerar man klorat med krom(III)sulfat resp. svaveldioxid. En tredje metod, Kestings metod, finns också representerad här i landet, i Karskär. Den grundar sig på reduktion av klorat med saltsyra.

Persson-Angels metod

Man utgår från natriumklorat och svaveldioxid, men dessa reagerar inte här direkt med varandra. Man låter svaveldioxid reducera dikromat till krom(III)jon, vilken i sin tur får reducera kloratet till klordioxid, varvid krom(III)jonen oxideras till dikromat. Man avser med detta förfaringssätt att undvika de bireaktioner som uppkommer när svaveldioxid får direkt reducera natriumklorat, för att på detta sätt få stort utbyte av klordioxid ur kloratet.

$$Cr_2O_7^{2-} + 3\,SO_2 + 2\,H^+ \longrightarrow 2\,Cr^{3+} + 3\,SO_4^{2-} + H_2O$$

$$6\,ClO_3^- + 2\,Cr^{3+} + H_2O \longrightarrow 6\,ClO_2 + Cr_2O_7^{2-} + 2\,H^+$$

Summaformeln blir alltså

$$2\,ClO_3^- + SO_2 \longrightarrow 2\,ClO_2 + SO_4^{2-}$$

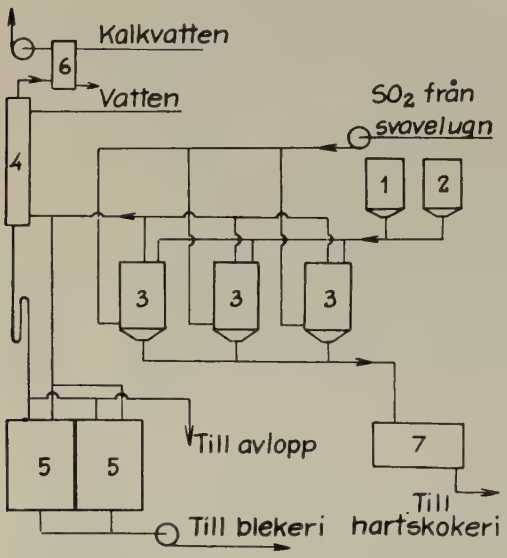
Kromföreningen deltar i en cyklisk process och lämnar aldrig systemet. Reaktionerna äger rum i fyra seriekopplade reaktionstorn, genom vilka reaktionsblandningen rinner. Komprimerad luft matas in i varje torn för bortforsling av bildad klordioxid till två absorptionstorn, där gasen löses i vatten. Som biprodukt fås glaubersalt, som lämpligen används för beredning av kokvätska för sulfatfabrik.

Holsts metod

Holsts metod är viktigast här i Sverige. I reaktionskärl (reaktorer) reducerar man natriumklorat i vattenlösning medelst svaveldioxid.

$$2\,ClO_3^- + SO_2 \xrightarrow{H^+} 2\,ClO_2 + SO_4^{2-}$$

I reaktorn sker många reaktioner.



1. kloratlösare
2, 7. svavelsyrebehållare
3. reaktorer
4, 6. absorptionstorn
5. behållare för klordioxidlösning

Schema över tillverkning av klordioxid enligt Holst.

Bildad klordioxid absorberas i vatten i ett absorptionstorn. Man har funnit, att när svaveldioxid får bubbla genom natriumkloratlösning, bildas ingen klordioxid, förrän lösningen har en viss högre surhetsgrad. Man tillsätter därför svavelsyra till natriumkloratlösningen, innan svaveldioxid införs, och får då högre utbyte med av-

seende på klordioxid. Förhållandet mellan koncentrationerna av svaveldioxid och klorat har ett optimalt värde. Från reaktorerna (se figur) leds klordioxiden till ett absorptionstorn, ur vilket man får en klordioxidvattenlösning. Den förbrukade och från klordioxid befriade reaktionslösningen, som innehåller svavelsyra, används i Husum i sulfatfabrikens hartskokeri för frigörande av harts- och fettsyror ur dessas alkalisalter.

Provning. I frånvaro av annan aktiv gas kan man bestämma mängden ClO_2 i vattenlösning genom tillsats av KJ-lösning, varefter man titrerar på frigjord jod. Om Cl_2 är närvarande och om lösningen är neutral, ger denna titrering summan av ClO_2 och Cl_2. Mängderna var för sig kan bestämmas, om man efter denna titrering surgör lösningen. Då reagerar vid reaktion mellan ClO_2 och J^- i neutral lösning bildad ClO_2^- med mera J^- till Cl^- och J_2.

1. Prov av ClO_2- och Cl_2-lösning + KJ-lösning:

   $ClO_2 + 2\,J^- \longrightarrow 2\,ClO_2^- + J_2$

   $Cl_2 + 2\,J^- \longrightarrow 2\,Cl^- + J_2$

2. Titrering med $Na_2S_2O_3$-lösning:

   $J_2 + 2\,S_2O_3^{2-} \longrightarrow S_4O_6^{2-} + 2\,J^-$

3. Tillsats av svavelsyra och fortsatt titrering:

   $ClO_2^- + 4\,J^- + 4\,H^+ \longrightarrow Cl^- + 2H_2O + 2\,J_2$

   $J_2 + 2\,S_2O_3^{2-} \longrightarrow S_4O_6^{2-} + 2\,J^-$

Reflexioner kring ett examensprov i kemi

Av lektor Hans Gustaf Hansson, Lund

Den första uppgiften i det skriftliga provet i kemi i praktisk realexamen h. t. 1957 — Elementa *40* (1957), 293 — ställer eleven bl. a. inför följande fråga: är väteperoxid ett oxidations- eller reduktionsmedel? Jag skall söka att kort men fullständigt besvara frågan.

Väteperoxid kan verka som oxidationsmedel, i sur lösning enligt förloppet:

$$H_2O_2 + 2H_3O^+ + 2e^- \longrightarrow 4H_2O$$

Normalpotentialen är +1,77 volt (mätt mot normala vätgaselektroden).

Väteperoxiden kan vidare verka som reduktionsmedel; i sur lösning blir förloppet:

$$H_2O_2 + 2H_2O \longrightarrow O_2(g) + 2H_3O^+ + 2e^-$$

Normalpotentialen är +0,682 volt.

Som ett enkelt och vanligt exempel på väteperoxids oxidationsverkan kan nämnas oxidation av ferrojon till ferrijon. Exempel på väteperoxids reducerande verkan är dess reaktion med kaliumpermanganat i sur lösning under bildning av manganojoner.

Ovanstående klargör också, varför en väteperoxidlösning är instabil. De två förloppen enligt formlerna ger tillsammans en autoredoxprocess med formeln:

$$2H_2O_2 \longrightarrow 2H_2O + O_2(g)$$

enligt vilken väteperoxidens spontana sönderfall i huvudsak försiggår, snabbt eller långsamt beroende på förvaringsbetingelserna, då reaktionen katalyseras av ett flertal faktorer.

Jag vet inte, om det är rimligt att i realexamen kräva en korrekt redogörelse för väteperoxidens redoxegenskaper, personligen tycker jag att det är för svårt. Men *om* man kräver detta, är det utomordentligt olämpligt att formulera frågan som ett val mellan beteckningarna oxidations- och reduktionsmedel. Sanningen är ju att båda är lika riktiga.

I första uppgiften frågas också om svaveldioxid är ett oxidations- eller reduktionsmedel. Jag antar att man förväntar svaret reduktionsmedel, vilket svarar mot den vanliga övergången av svaveldioxid (sulfit) till svaveltrioxid (sulfat).

Nu kan emellertid svaveldioxid i något fall verka oxiderande — t. ex. på svavelväte, som tyvärr råkar vara det ord, som står närmast i examenstexten och därför kan förvilla eleven. I den kvalitativa analysen brukar man före utfällningen med svavelväte reducera eventuell femvärd arsenik till trevärd. Reduktionen utföres vanligen med svaveldioxid. Det är därvid viktigt att man före utfällningen med svavelväte kokar bort överskottet av svaveldioxid, som annars förbrukar svavelväte under bildning av fritt svavel, som komplicerar analysen. Förloppet kan skrivas:

$$2H_2S + SO_2 \longrightarrow 2H_2O + 3S$$

Det är möjligt, att det på detta stadium inte alltid går att undvika en kategorisk frågeställning (oxidations- eller reduktionsmedel), som bara tar hänsyn till en viss typ av reaktion utan att hålla möjligheten av andra reaktionstyper för ögonen och som inte klargör ett redoxsystems (gentemot andra redoxsystem) *relativa* oxidations(reduktions)-förmåga. Önskvärt är det emellertid, att relativiteten framhäves; där det inte lämpligen kan ske, bör exemplen väljas med omsorg.

I tredje uppgiften frågas efter förloppet och produkterna vid bl. a. upphettning av kaliumklorat. Vi har här som bekant två reaktioner:

a) $2KClO_3 \longrightarrow 2KCl+3O_2$

b) $4KClO_3 \longrightarrow 3KClO_4+KCl$

Utan katalysator äger reaktionen vid temperaturer över 550° rum enligt a); i temperaturintervallet 480°—510° enligt b). Med katalysator (t. ex. MnO_2) sker reaktionen enligt a) redan vid 150° (Hofmann: Lehrbuch der anorganischen Chemie). Frågan förefaller onödigt komplicerad, eller skall man pruta på sanningskravet vid bedömningen av svaren?

I samband med räkneexemplen i stökiometri skulle jag vilja framhålla följande. Det är på detta stadium naturligtvis omöjligt att ens antydningsvis ge eleverna en föreställning om grunderna för en korrekt felberäkning. Detta bör emellertid inte utesluta krav på räknesnygghet vad avser ett korrekt avkortat svar. Svaret kan ju i allmänhet angivas med *högst* den noggrannhet, varmed den *minst* noggranna primäruppgiften i texten givits. Enligt normal laboratoriepraxis brukar titrar, volymer, invägningar etc. angivas så, att man har att räkna med ett fel på 1—5 enheter i sista siffran. Eleverna bör få lära sig att ta hänsyn härtill vid angivandet av svaret. De flesta av de under examensuppgifterna angivna svaren tar emellertid icke hänsyn till detta. Vidare bör man ha ovanstående för ögonen vid komposition av provuppgifter. Jag anser det ganska otroligt, att man utför en titrering med 0,12-N tiosulfat. Antagligen menas en 0,1200-N tiosulfatlösning. (Uppgift 10.)

Avslutningsvis kan jag inte underlåta att uttrycka min förvåning över att i ett examensprov år 1957 återfinna likhetstecknet som symbol mellan de båda leden i en reaktionsformel. Det är nu mer än tio år sedan detta ersattes av reaktionspilar i högskoleundervisningen och i läroböcker för realskolor och gymnasier. Allt fler lärare använder numera detta överlägsna beteckningssätt i sin undervisning och låter bli att använda likhetstecknet som symbol för att utgångssubstanserna förbrukas under bildning av något annat. Det vore intressant att få höra skälen till att det nya skrivsättet ännu inte auktoriserats på högsta pedagogiska ort, trots tidigare påpekande; se B. Englund, Formeln för ammoniak, Elementa *39* (1956) 178.

Approximativa tyngdpunktsformler

Av lektor Tore Öberg, Norrköping

I formlerna för beräkning av tyngdpunkterna för båge, sektor och segment till en cirkel ingår förhållandet $\alpha/\sin\alpha$, där α är halva medelpunktsvinkeln. I det följande skall för detta förhållande härledas ett approximativt uttryck, som sedan användes för att uppställa approximativa formler för dessa tyngdpunkters beräkning.

Härledning. Sök sådana värden på konstanterna $a, \ldots, f$, att det nedan med $\bar{x}$ betecknade uttrycket blir nära lika med x.

$$\bar{x}=\sin x\cdot\frac{d+e\cos x+f\cos^2 x}{a+b\cos x+c\cos^2 x}$$

Man kan lämpligen sätta $a+b+c=d+e+f$, ty då går $\bar{x}$ mot x, då x går mot noll.

Inför felfunktionen $\varphi=\bar{x}-x$, derivera densamma och sätt i derivatan $\cos x=u$. Sök därpå de samband, som måste finnas mellan $a, \ldots, f$ för att ekv. $\varphi'=0$ skall ha en trippelrot $u=1$. Detta innebär, att i potensserieutvecklingen av φ som första term erhålles a_7x^7, dvs. $\bar{x}=x+a_7x^7+\ldots$ Ur dessa samband beräknas b, c och e uttryckta i a, d och f. Enligt denna plan utförda räkningar, som äro elementära men konditionskrävande, ge

$$\bar{x}=\sin x\cdot\frac{d+(14f+29d-45a)\cos x+f\cos^2 x}{a+(9f+21d-32a)\cos x+(6f+9d-14a)\cos^2 x} \qquad (1)$$

där bråket på högra sidan är det sökta approximativa förhållandet. Vid serieutveckling av högra ledet i (1) erhålles $\bar{x}=x+a_7x^7+\ldots$, där

$$a_7=-\frac{2}{5\cdot 7!}\cdot\frac{6f-51d+80a}{f+2d-3a}$$

Valet av siffervärden på konstanterna a, d och f i (1) beror dels på hur god överensstämmelse man vill ha mellan $\bar{x}$ och x, dels på storleken av det intervall, inom vilket denna överensstämmelse skall gälla. Dessutom bör naturligtvis hänsyn tagas till att koefficienterna om möjligt skola vara relativt låga heltal.

Nöjer man sig med x-värden mellan 0 och $\frac{1}{4}\pi$, kan man exempelvis välja $f=0$ och $a_7=0$ och får då

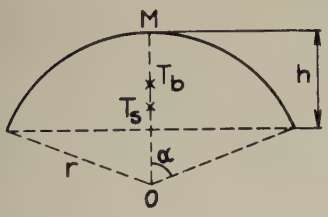
$$\bar{x}=\frac{5\sin x}{3}\cdot\frac{16+5\cos x}{17+16\cos x+2\cos^2 x} \qquad (2)$$

varvid $|\varphi|_{\max}=0{,}0001°$ vid $x=\frac{1}{4}\pi$ radianer.

Vill man använda (1) för vinklar mellan 0 och $\frac{1}{2}\pi$, kan det vara lämpligt, att för $2d/a$ välja ett gott rationellt närmevärde på π, för att uppnå god noggrannhet vid $x=\frac{1}{2}\pi$.

Tillämpningar

I. Tyngdpunkten för en cirkelbåge. För dess avstånd till bågens mittpunkt gäller exakt



$$MT_b = r\left(1-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right).$$

Använd (1) och sätt $f=0$, $d=11$, $a=7$.

Då blir $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=\dfrac{7+7\cos\alpha+\cos^2\alpha}{11+4\cos\alpha}$ och

$$MT_b = r\cdot\frac{(1-\cos\alpha)(4+\cos\alpha)}{11+4\cos\alpha}$$

Då $1-\cos\alpha=h/r$, erhålles härav

$$MT_b=\frac{5r-h}{15r-4h}\cdot h \tag{3}$$

Anm. Sektorns tyngdpunkt erhålles som bekant enkelt ur bågens.

II. Tyngdpunkten för ett segment.

Man har exakt (se t. ex. Elfyma-tabellen sid. 42)

$$MT_s = r-\tfrac{2}{3}r\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\alpha/\sin\alpha-\cos\alpha}$$

Använd (1) och sätt $c=6f+9d-14a=0$, $d=11$, $a=7$. Härav erhålles $\dfrac{\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{66+10\cos\alpha-\cos^2\alpha}{42+33\cos\alpha}$, vilket ger $MT_s=r\cdot\dfrac{(1-\cos\alpha)\cdot(19+11\cos\alpha)}{33+17\cos\alpha}$ varav

$$MT_s=\frac{30r-11h}{50r-17h}\cdot h \tag{4}$$

Den noggrannhet som erhålles med hjälp av formlerna (3) och (4) framgår av nedanstående tabell:

h/r	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
MT_b/r enl. 3	0,06761	0,13731	0,2095	0,2847	0,3636	0,4471
Rätt värde	0,06761	0,13728	0,2094	0,2845	0,3634	0,4471
MT_s/r enl. 4	0,11930	0,2370	0,3528	0,4659	0,5758	0,6811
Rätt värde	0,11929	0,2369	0,3527	0,4657	0,5756	0,6814

Tillägg

a) För $f=0$, $d=201$, $a=128$ erhålles

$$MT_b=\frac{h}{3}\cdot\frac{90r-17h}{90r-23h} \tag{5}$$

och för $6f+9d-14a=0$, $d=245$, $a=156$ blir

$$MT_s=\frac{3h}{5}\cdot\frac{74r-27h}{74r-25h} \tag{6}$$

(5) och (6) ger nära dubbelt så god anpassning till de riktiga värdena som (3) och (4).

b) Med användning av (4) erhålles följande formel för ytan A av ett cirkelsegment med motsvarande noggrannhet

$$A=\frac{k\cdot h}{3}\cdot\frac{50r-17h}{25r-11h}$$

Bokanmälningar

R. Gouyon, *Précis de mathématiques spéciales.* Librairie Vuibert, Paris, 1956, iv+647 p., 6300 fr.

Författaren presenterar i detta arbete den kurs i »specialmatematik» inom vars ram bl. a. École Polytechnique väljer sina inträdesprov.

Stoffet är mycket sammanträngt och förbluffande rikt. Framställningen är klar; stränghet och åskådlighet har förenats. Så vitt jag kunnat finna är diskussionerna med få undantag fullständigt genomförda, och där luckor inte kunnat undvikas har de i allmänhet påpekats.

I vår tid, då den matematiska symbolismen nått en så rik utveckling och en så hög grad av abstraktion, har säkerligen arbeten av denna art — frånsett deras närmaste syfte — en viktig uppgift, nämligen att påminna om och påvisa den konkreta rikedom som man kan finna inom elementarmatematiken med dess allsidiga perspektiv och klassiska form (om också av förf. något moderniserad).

I kort sammanfattning är bokens innehåll: tal, gränsvärden, vektorer, analytisk geometri, polynomkalkyl, lineär algebra, lineära transformationer, differential- och integralkalkyl med geometriska tillämpningar (plana kurvor och rymdkurvor, ytor), implicita funktioner, envelopper, koniska sektioner och ytor (i projektiva rum), serier, differentialekvationer av första och andra ordningen, mekanikens elementer, kompletterande noter till deskriptiv geometri. *V. Stenström*

K. Hultman, *Livförsäkringsteknik*. Institutet för försäkringsutbildning, Brahegatan 60, Stockholm, 1958, 436 s., kr. 28:00 (klotb.).

Föreliggande bok utgör en omarbetning av författarens år 1940 utarbetade bok »Om livförsäkringsteknik». Den är i främsta rummet avsedd som lärobok för att utbilda personal på livförsäkringsbolagens aktuarieavdelningar. Därjämte kommer den — liksom var fallet med den föregående boken — att intagas i studieplanerna för matematisk statistik vid Stockholms Högskola och Uppsala universitet.

Först kommer en avdelning, innehållande i stort sett skolans kurs i rötter, potenser, logaritmer, ränteräkning och elementär sannolikhetskalkyl. Sedan införes funktionerna l_x, D_x och N_x, vilka förekommer i grundtabellerna och vilka begagnas bl. a. för beräkning av livförsäkringspremier. Efter omnämnande av olika försäkringstyper och angivande av hur premierna beräknas i de olika fallen behandlas premiereserv och återköp.

I avdelning III införes så det kontinuerliga betraktelsesättet, vilket motsvarar vad som kan kallas »ögonblicklig kapitalisering». I stället för att betrakta sannolikheten för en x-årig person att dö inom ett år $[q_x = (l_x - l_{x+1})/l_x]$ införes sannolikheten för en x-åring att dö inom tidselementet $\Delta x (= \mu'_x \cdot \Delta x)$.

Förf. berör befolkningsdödligheten i Sverige och visar, hur den förändrats sedan 1700-talet. Den grafiska framställningen på sid. 139 över dödlighetstalets förändringar är mycket intressant. I kap. 13 kommer förf. in på de viktiga bestämmelserna angående avdrag i självdeklarationen för vissa försäkringspremier. Av allmänt intresse är även återbäringen (kap. 10 och 21) och meddelandet att dess utbetalande på många håll nu uppskjuts till försäkringstidens slut. Av intresse kan även vara avsnitten om försäkringsteknisk riskutjämning (kap. 22) och om livförsäkringens företagsformer (kap. 26). Slutligen behandlas i kap. 29 den kollektiva tjänstepensionsförsäkringen, vilken är förknippad med bolaget SPP, det svenska näringslivets centrala pensionsinrättning. Som exempel på hur omfattande detta bolags verksamhet är omnämnes, att under år 1956 inbetalades 400 milj. kr i försäkringspremier.

Av ovanstående framgår, att det är synnerligen lämpligt att denna bok anskaffas till läroverkens referensbibliotek. För matematikläraren är det av vikt att följa med sin tid och vidareutbilda sig på de områden, som har nära anknytning till skolkursen; jag tänker i detta fall särskilt på statistiken, sannolikhetsläran och exponentialfunktionen. Somliga partier av boken torde även väl lämpa sig för enskilt arbete av därför intresserade elever. Jag rekommenderar boken på det bästa. Anskaffningen bör ej ske genom bokhandel utan direkt genom Institutet för försäkringsutbildning. *F. Ehrnst*

John Kemeny/Laurie Snell/Gerald Thompson, *Introduction to Finite Mathematics.* Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1957, Pp. 372, $ 5.00.

Vid Dartmouth College har man sedan några år prövat nya kurser i matematik vid sidan av de konventionella. Då dessa infördes, var avsikten främst att ge en orientering inom sådana områden av matematiken, som visat sig vara av värde för biologien och samhällsvetenskaperna. Man ville erbjuda ett alternativ till de traditionella kurserna, som i stor utsträckning var inriktade på fysikaliska tillämpningar. Vidare strävade man efter att introducera några avsnitt hämtade från s. k. modern matematik. Då emellertid framställningen måste göras elementär med hänsyn till elevernas tidigare utbildning, begränsade man sig till att betrakta »ändliga» problem. Det är naturligt att någon lärobok, som fyllde dessa skilda krav, inte existerade. Då författarna till föreliggande bok gick till verket för att söka skapa en sådan, bad de några praktiskt verksamma matematiker göra upp en förteckning över lämpliga områden, som uppfyllde dessa fordringar. Från den så erhållna listan valde författarna slutligen ut några ämnen, som inbördes hörde ihop.

Resultatet av denna sammanställning är inte ointressant. Boken behandlar elementär logistik, mängdlära, gruppteori, vektor- och matrisalgebra samt sannolikhetskalkyl. Teorien illustreras med konkreta problem från sociologien, genetiken, psykologien, spelteorien osv. Många av dessa är matematiskt intressanta, andra ger kanske främst roande inblickar i amerikanskt samhällsliv. Varje kapitel avslutas med en litteraturförteckning, där den intresserade kan finna material för fortsatta studier. Framställningen är klar och mycket utförlig. Förkunskaper motsvarande vår första realring torde vara tillräckliga, men en viss mognad förutsättes hos läsaren.

En svensk matematiklärare frapperas av amerikanarnas välgörande frihet från traditionellt tänkande, då det gäller kursens utformning. Boken ger anledning till funderingar över våra gymnasiekursers innehåll och uppläggning. Den är väl värd ett närmare studium, inte minst ur denna synpunkt. *Per Häggmark*

Jacques Dixmier, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien* (Algèbres de von Neumann). Gauthier-Villars, Paris, 1957, 367 p., $ 15.90.

Den framstående matematikern Johan von Neumann, som avled i Amerika för ett år sedan, har av J. Dieudonné föreslagits som namngivare åt vissa algebror, som tidigare vanligtvis har kallats »ringar av operatorer» eller »W*-algebror». Namnbytet är ur historisk synpunkt synnerligen berättigat.

Föreliggande framställning av von Neumanns algebror förutsätter ganska ingående kunskaper om topologiska vektorrum och speciellt Hilbertrum. Dixmier, som är en framträdande medlem av författargruppen N. Bourbaki, refererar till dennes »Espaces vectoriels topologiques». Av spektralteorien behöver man »i princip» endast känna till Gelfand-Neumarks sats om funktionalrepresentation sådan den är framställd i Loomis »An introduction to abstract harmonic analysis», men »en viss förtrogenhet med spektralteoriens detaljer» är enligt Dixmier »att föredraga». Vidare behöver man för att kunna läsa kapitel 2 känna till Bourbakis integrationsteori. Dessutom är ytterligare referensmaterial samlat i fem »appendices», därav en del outgivet Bourbaki-material om analytiska mängder.

Bokens huvuddel består av tre kapitel. I de två första redovisar författaren de resultat inom teorien för von Neumann-algebror, som enligt hans mening just nu synes vara nyttigast för tillämpningarna, utan att dock gå in på dessa. Kapitel 1 med titeln Théorie globale avhandlar von Neumann-algebror i stort: definition, elementära operationer, densitetssatser, linjära positiva former, Hilbertalgebror (unitära algebror) och problemet att klassificera algebrorna. Kapitel 2, »Reduction des algèbres de von Neumann», behandlar teorien för den direkta integralen av Hilbertrum. Enligt förordet är detta kapitel till största delen inspirerat av en kommande bok av Godement om spektralteori. Kapitel 3, »Complements», är mera tekniskt, vänder sig främst till specialister och är praktiskt taget oberoende av kapitel 2.

I likhet med ordinära Bourbaki-böcker har Dixmiers bok 10—20 övningsexempel efter varje paragraf samt två sakregister utöver innehållsförteckningen: ett »Index des notations» och ett »Index terminologique». Till skillnad från Bourbaki har författaren dessutom två bibliografier, en på 15 nummer över »Traités généraux» och en på 157 tidskriftsartiklar. *Edgar Asplund*

Carl-Erik Fröberg, *Complete Elliptic Integrals.* CWK Gleerup, Lund, 1957, 82 s., kr. 10:—.

Arbetet utgör ett tabellverk över de båda fundamentala kompletta elliptiska integralerna K(k) och E(k) samt vissa därur härledda komplementärfunktioner K' E' S och S'. Värdena ges med 10 decimaler. Denna noggrannhet kan synas hög för praktiska användningar, men anmälaren kan ur egen praktik inom den teoretiska elektromaskinläran som exempel intyga förekomsten av viktiga fall, då elliptiska integraler med denna noggrannhet fordras, nämligen då resultaten innehålla små differenser mellan stora tal. Tabellverket torde fylla ett allvarligt behov. *Fredrik Dahlgren*

Fr. A. Willers, *Methoden der praktischen Analysis.* 3. Aufl. W. de Gruyter, Berlin, 1957, 429 S., DM 28:—.

I föreliggande bok behandlas hjälpmedel för numeriska beräkningar, vanlig och trigonometrisk interpolation, numerisk derivation och integration, lösning av ekvationer och ekvationssystem samt numerisk lösning av ordinära differentialekvationer. Både i fråga om urval och innehåll skiljer sig boken avsevärt från nyare engelsk och amerikansk litteratur inom området: den innehåller åtskilligt mera teori än man är van vid, vilket f. ö. är dess styrka, men avgjort mindre rent praktiska metoder. Tyvärr lider boken av bristen att i vissa avseenden inte vara fullt modern.

I förordet till 2:a upplagan (1949) nämner förf., att han avstått från att taga med metoder, som är speciellt lämpade för automatiska siffermaskiner, eftersom det tyvärr inte fanns några sådana maskiner i Tyskland. År 1957 kan dock sådana omständigheter inte åberopas, och man måste bestämt hävda, att nämnda brist, i betraktande av den stora roll som siffermaskinerna nu spelar är ganska allvarlig.

I kapitlet om interpolation tynges framställningen onödigt genom att operatorteknik ej kommit till användning. Derivation med hjälp av geometrisk metodik förefaller sakna allt praktiskt intresse. Däremot hälsar man med glädje vad som finns i fråga om approximativ integration av integralekvationer. I avsnittet om ekvationer och ekvationssystem saknar man bl. a. Stiefel-Hestenes cg-metod samt Jacobis metod för diagonalisering av reella symmetriska matriser. Slutligen saknas i kapitlet om ordinära differentialekvationer en del nyare metoder liksom även något om stabilitetsfrågor.

Ovan gjorda anmärkningar får dock inte undanskymma, att boken innehåller en mängd nyttigt stoff; bl. a. behandlas resttermer och konvergensfrågor i allmänhet mera ordentligt än man är van vid i andra jämförliga framställningar. För den som arbetar inom området och är åtminstone något insatt i hithörande problem har boken åtskilligt att ge.

Carl-Erik Fröberg

Terrel L. Hill, *Statistical Mechanics.* McGraw-Hill Book Co., New York/Toronto/London, 1956, Pp. 432, $ 9.00.

Det har gjorts flera betydande framsteg inom den statistiska mekaniken, sedan de nu klassiska verken av Fowler, Tolman, Fowler och Guggenheim samt Mayer och Mayer utkom för snart tjugo år sedan. Fastän åtskilliga elementära läroböcker och ett fåtal monografier om teorien för statistisk jämvikt publicerats på senare år, har man saknat ett sammanfattande verk. Författaren har med detta arbete i någon mån velat fylla detta tomrum. Han har utvalt några av de fält inom den klassiska statistiska mekaniken för jämviktstillstånd där

de viktigaste upptäckterna gjorts och behandlat dem utförligt. En stor del av materialet har tidigare ej publicerats.

Boken innehåller åtta kapitel. I de båda första ges för fullständighetens skull en översikt av grunderna för den statistiska mekaniken med utgångspunkt dels från klassisk mekanik, dels från kvantummekanik. Olika ensembletyper behandlas utförligt. Det tredje kapitlet handlar om sambandet mellan statistisk mekanik och termodynamik. Teorien för fluktuationer i de olika ensemblerna diskuteras i det fjärde kapitlet. Det femte kapitlet avhandlar teorien för en klassisk enatomig gas med beaktande av de intermolekylära krafterna. Gastillståndet diskuteras med användande av J. E. Mayers teori under det att det omtvistade kondensationsområdet angripes med hjälp av Lee-Yangs nyligen uppställda teori. Det sjätte kapitlet innehåller en lång — 106 sidor — och utförlig redogörelse för teorien för vätsketillståndet med användning av molekylära fördelningsfunktioner. Denna metod, som utvecklats av Kirkwood, Yvon, Green och Mayer under de senaste tjugo åren, är för närvarande den enda som tillåter en fullständig numerisk behandling av vätskefasen. I det sjunde kapitlet behandlas närmaste-granne-statistik (Ising-modellen) med tillämpningar på ferromagnetism, lokaliserad absorption och adsorption, ordningsomvandlingar i legeringar samt binära lösningar. Det sista kapitlet berör olika gitterteorier för vätskor och fasta kroppar såsom fria volym- och hålteorier. Dessa tidigare intuitivt grundade metoder har på senare tid kunnat härledas från den statistiska mekanikens allmänna principer med användande av väldefinierade approximationer. Boken avslutas med tio appendices och är rikligt försedd med referenser till tidskriftslitteraturen.

Boken förutsätter en viss bekantskap med statistisk mekanik och är i första hand avsedd för »graduate students» och forskare inom fysik, kemi och biologi. Den gör på det hela taget ett mycket vederhäftigt intryck och kan varmt rekommenderas. *Anders Ramgard*

E. G. Cullwick, *Electromagnetism and Relativity*, Longmans, Green and Co., London 1957, Pp. 299, 63 s. net.

Teorien för elektromagnetismen står som bekant i ett nära släktskapsförhållande till den speciella relativitetsteorien. För fysikern har detta faktum en central betydelse. Elektroteknikern däremot betraktar säkert fältekvationernas relativistiska invarians som en subtilitet utan större praktisk betydelse. Man skall emellertid inte förbise, att det inom elektromagnetismen finns speciella, nog så konkreta problem, där endast en konsekvent relativistisk behandling leder till riktiga resultat. Detta är just utgångspunkten och motivet för denna framställning av ett gränsområde mellan teoretisk fysik

och elektroteknik. Det skall tilläggas, att bokens författare är professor of electrical engineering vid University of S:t Andrews, Dundee.

Efter en grundlig genomgång av elektromagnetismens och relativitetsteoriens elementa tar författaren upp och löser fullständigt ett flertal problem rörande bl. a. elektromagnetisk induktion i roterande magneter, vilka är antingen elektriska ledare eller dielektrika. Hit hör även de elektromagnetiska fenomen i ledande vätskor, magnetohydrodynamiska vågor, som först introducerades av H. Alfvén. Boken avslutas med några betraktelser över den elektriska strömmens mekaniska tröghet med tillämpning på teorien för supraledare.

Boken torde ha mest att ge den som önskar penetrera bestämda problem med teknisk anknytning rörande det elektromagnetiska fältet i och omkring kroppar i rörelse. *Nils Svartholm*

J. Kahra, *Die spezielle Relativitätstheorie.* Aulis Verlag, Frankenberg, 1957, 64 S., DM 2.80.

Detta lilla häfte innehåller en någorlunda grundlig och vederhäftig diskussion av den speciella relativitetsteoriens grundvalar, där de fysikaliska principerna inte som så ofta annars är fallet göms undan bland mer eller mindre eleganta härledningar av matematiska formler. De första 20 sidorna ger en översikt över relativitetsteoriens förhistoria, varvid behandlas bl. a. begreppet inertialsystem, eterhypotesen och Michelsons försök. I fortsättningen diskuteras Einsteins formulering av relativitetsprincipen och principen om ljushastighetens konstans, begreppen samtidighet, tidsdilatation och Lorentzkontraktion samt sambandet mellan massa och energi.

En korrektion: På sid. 19 och 20 talas om en båts hastighet »gegen die Erde». Förf. avser förmodligen hastigheten i förhållande till det strömmande vattnet. *C. V. Jonsson*

Mark W. Zemansky, *Heat and Thermodynamics.* 4th Ed. McGraw-Hill Book Co., New York/Toronto/London, 1957, Pp. 484, $ 7.50.

Denna bok, som först publicerades år 1937, föreligger nu i sin fjärde upplaga, vilket ger en antydning om den stora uppskattning den rönt. Framgången är välförtjänt, den är nämligen en av de allra bästa läroböckerna i klassisk termodynamik på mellannivå. Den är överskådlig, lättläst och pedagogiskt synnerligen väl genomtänkt.

De första tio kapitlen behandlar de grundläggande termodynamiska begreppen och lagarna såsom temperatur, arbete, värmemängd, inre energi, reversibla processer, entropi samt första och andra huvudsatserna. Talrika belysande tillämpningar på gaser, gummisnoddar, dielektriska och paramagnetiska system underlättar förståelsen. I de återstående nio kapitlen behandlas mera detaljerat några fysikaliska, kemiska och tekniska användningar.

I den nya upplagan har flera moderna tillämpningar av termodynamiken inkluderats, exempelvis en kortfattad redogörelse för Onsagers metod för behandling av kopplade irreversibla flöden, en behandling av den piezoelektriska effekten och dielektriska fenomen, samt andra ordningens fasövergångar. De mycket låga temperaturernas fysik avhandlas i ett nytillkommet sextiosidigt kapitel, vilket dock till stor del är alltför speciellt för en lärobok av detta slag.

Boken innehåller närmare trehundra instruktiva exempel, de flesta utan svar.

Anders Ramgard

O. Mackey/W. Barnard/F. Ellenwood, *Engineering Thermodynamics.* Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. 428, $ 7.95.

Föreliggande lärobok i tillämpad termodynamik är en av O. Mackey utförd grundlig omarbetning och modernisering av Barnard och Ellenwoods Heat Power Engineering 3rd Ed., som utkom år 1933. Den behandlar de termodynamiska grunderna för de inom tekniken använda värmemaskinerna och är närmast avsedd för studerande inom det maskintekniska facket.

De fundamentala termodynamiska sambanden diskuteras i de sex första kapitlen. I de tio följande behandlas stationära strömningsförlopp, blandningar av ideala gaser, reaktioner mellan ideala gaser, egenskaper hos reella gaser och ångor, cirkelprocesser och deras tillämpning på förbränningsmotorer, ångmaskiner, gasturbiner, kylmaskiner och luftkonditioneringsanläggningar.

Boken innehåller över trehundra övningsexempel med svar, som genomgående är givna i det engelska sortsystemet.

Anders Ramgard

Helen D. Megaw, *Ferroelectricity in Crystals.* Methuen & Co, Ltd, London 1957. Pp. xi+220, 27 s. 6 d.

Den spontana magnetiseringen, ferromagnetismen, är rätt väl tillgodosedd med sammanfattande framställningar. Motsvarigheten när det gäller elektrisk polarisation, ferroelektriciteten, som upptäcktes i början av 1920-talet och som särskilt efter det senaste världskriget intensivt studerats på åtskilliga håll, är i det avseendet sämre ställd. Författarinnan till den nu föreliggande volymen, som är Fellow vid Cambridges kvinnliga Girton College och Assistant Director of Research in Crystallography, har få föregångare; en bok av Jaynes, Princeton 1953, ett kapitel i Kittels Solid State Physics (1956) och von Hippels artikel 1950 i Rev. of Mod. Physics behandla samma ämne. Viktfördelningen motsvarar väl ungefär den tekniska betydelsen: för ferromagnetismen enorm, för ferroelektriciteten ännu mycket ringa, i varje fall

då man inte medräknar piezoelektriciteten. I sin bok talar inte Megaw om några tillämpningar. I dess första 2/3 presenteras det experimentella materialet. Detta passar hennes kristallografiska inställning. Framställningen är ur denna synpunkt gedigen, utan att bli alltför tungläst för den i facknomenklaturen mindre väl hemmastadde.

Inledningsvis få mätmetoderna några ord och grundfenomenet beskrives i anslutning till hystereskurvan polarisation/fältstyrka, varvid också de med konduktiviteten sammanhängande skillnaderna visavi den analoga magnetiska företeelsen framhållas. De kristallsymmetriska betingelserna för ferroelektricitetens uppträdande bli klart belysta. Verkan av domänbildning och av uppträdande tvillingstruktur klargöres. Beskrivningen av hittills undersökta kristaller, som ordnats i huvudgrupper kring seignettesalt, KH_2PO_4 och $BaTiO_3$, håller hela tiden kontakt med kristallstrukturen, som illustreras med perspektivskisser, projektioner och fotografier. Litteraturreferenserna ha ägnats omsorg med sikte på fullständighet. Teorien har fått ett femtiotal sidor i bokens senare del. Författarinnan skiljer här på mera fenomenologiska beskrivningsförsök och arbeten som söka bygga upp en modell av den ferroelektriska kristallen från kända atom- och molekylfysikaliska element. Att ge en samlad bild är utan tvivel en svår uppgift; den har författarinnan uppenbarligen inte känt sig vuxen. Den refererande framställningen har blivit brokig.

Ett behändigt tillägg är ordlistan med definitioner på ett sextiotal kristallografiska begrepp. Bokens tio kapitel ha försetts med underfundiga eller spexiga motton, där bidragen hämtats både från Shakespeare och från studentikosa Cavendish-forskare, äldre och yngre.

Erik Rudberg

Herbert Graewe, *Atomphysik*. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn, 1954, 340 S., DM 19,80.

Man finner rätt snart, att förlagets omslagsreklam ... »Graewes Einführung ist also nicht etwa bloss für Studium und Unterricht bestimmt, sondern ihrer ganzen Anlage nach zugleich als Arbeitsbuch für jeden, der sich mit dieser Materie ernster beschäftigen will» är alldeles riktig.

Ämnet indelas i A) Atomfysikens grunder, B) Atomhölje och linjespektra, C) Atomkärnornas uppbyggnad och omvandling. I avsnittet A redogöres för materiens molekylära uppbyggnad, elementens periodiska system, Rutherfords och Bohrs atommodeller, kärnladdning och skalstruktur, joner, valens, isotoper, elementarpartiklar, dualitet mellan vågor och partiklar, Comptoneffekt, de Broglie-våglängd, materialisation, förintelsestrålning, kosmisk strålning. I delen B beskrives uppkomsten av linjespektra, beräknas väteatomens nivåschema, redogöres

för röntgenspektra och elektronernas fördelning i atomhöljet. Ämnet avgränsas genom att elektronbanorna beskrivas såsom cirklar. Dock införes förutom huvudkvanttalet även bikvantumtalet (varvid helt kort nämnes att detta motsvarar elliptiska banor av viss excentricitet), elektronernas spin, Bohr- och kärnmagnetonen, magnetiska kvanttal osv. Möjliga elektrontillstånd i atomen samt elementens termschemata ända upp till element 95, americium, presenteras.

Formler härledas i allmänhet icke. Undantag göres dock för vissa klassiska metoder, t. ex. beräkningen av en partikels specifika laddning. Många numeriska mönsterexempel belysa ifrågakommande mätmetoder och fysikaliska data.

Tredje avsnittet, C, omfattar bokens senare hälft och ägnas, som nämnts, kärnfysik. Efter en inledande redogörelse över registrering av snabba, laddade partiklar beskrivas metoder att accelerera sådana partiklar med hjälp av kaskad- och bandgeneratorer, cyklotroner, synkrocyklotroner, betatroner och synkrotroner. Först härefter behandlas radioaktivt sönderfall, α- och β-strålning, kärnornas stabilitet, omvandlingar, kärnreaktioner, neutroner. En stor mängd (αp), (αn), (α2n), (αd), ($\alpha\gamma$), (pα), (pn), . . ., (dα), (dn), . . ., (nα), . . . etc. reaktioner belysas genom exempel, med angivande av Q-värden och halveringstiden för slutprodukten (om den är aktiv). Transurana element upp till 98 (californium), upptäckten av dem samt deras framställning och egenskaper beskrivas. Massdefekt, energibalans, isotopseparation. Isotopers användning inom kemin, biologin och medicinen belyses. Åldersbestämning (C^{14}). Fission, kedjereaktioner, atombomber, reaktorer. Fixstjärnornas energiinnehåll och universums ålder. En tabell över ofta förekommande konstanter, en omfattande litteraturförteckning (mest tyska arbeten) och ett sakregister innehållande inemot 2000 uppslagsord bidraga till att göra boken lämplig såsom »arbetsbok», vilket ju redan inledningsvis framhölls. Texten illustreras av 81 figurer. Ett något rikhaltigare bildmaterial hade säkerligen icke skadat.

Boken kan varmt rekommenderas för självstudium och undervisning. På grund av sin detaljrikedom lämpar den sig såsom uppslagsbok i många frågor inom atom- och kärnfysiken och även dess historia.

Hilding Slätis

Niels Bohr, *Atomfysik og menneskelig Erkendelse*. J. H. Schultz, Köpenhamn, 1957, 124 s., dkr. 9: 50.

Det är av stort värde att några av professor Bohrs bemärkta anföranden vid internationella kongresser under de sista 25 åren angående fysikaliska frågor av mera allmänt intresse nu samlats i ett häfte. Denna samling av artiklar kan betraktas som en fortsättning

på en tidigare sammanställning av liknande art kallad »Atomteori og Naturbeskrivelse», utgiven år 1929.

Det genomgående temat i uppsatserna är de kunskapsteoretiska synpunkter, som kvantmekaniken bragt i dagen, samt deras betydelse för vetenskaplig forskning på skilda områden samt mänsklig kultur i allmänhet. I sju olika uppsatser behandlas följande spörsmål: »Lys og Liv — Biologi og Atomfysik — Fysikkens Erdendelseslære og Menneskekulturerne — Diskussion med Einstein om erkendelsesteoretiske Problemer i Atomfysikken — Kundskabens Enhed — Atomerne og den menneskelige Erkendelse — Fysikken og Livets Problem».

Den ur fysikalisk synpunkt mest intressanta artikeln handlar om diskussionerna med Einstein, vilken sedan länge intog en kritisk hållning gentemot kvantmekaniken. Einstein framlade vid dessa diskussioner en rad sinnrika förslag till försöksanordningar, som givetvis icke i praktiken men dock i princip skulle kunna möjliggöra en mer uttömmande beskrivning av atomära förlopp än vad som enligt Heisenbergsrelationen är teoretiskt genomförbar. Under meningsutbytet behandlades det atomära iakttagelseproblemet från flera synpunkter, i synnerhet den växelverkan, som äger rum mellan de atomära objekten och mätinstrumenten. Bohr bemöter Einsteins invändningar — utan att dock kunna ändra Einsteins grundinställning — genom att hänvisa till objektens komplementära egenskaper, vilka förutsätter försöksanordningar, som icke kan realiseras i Einsteins tankeexperiment.

B. Grundström

A. Friedrich / H. Langeheine, *Atomphysik im Unterricht.* Aulis Verlag, Frankenberg/Eder 1956, 65 S., DM 3,50.

A. Friedrich / H. Langeheine / H. Ulbricht, *Versuche zur Atomphysik.* Aulis Verlag, Frankenberg/Eder 1957, 115 S., DM 3,80.

Atomfysikens elementa införes i ständigt ökad omfattning i skolans fysik- och kemikurser. Tidskriften Praxis har i sin skriftserie utgivit en liten lärobok samt en handledning i demonstrations- och laborationsförsök, avsedda att införa eleverna i den moderna fysikens grundtankar, sedan de först tillägnat sig huvuddragen av den klassiska fysiken.

Läroboken innehåller en koncentrerad och väldisponerad redogörelse för fysikens utveckling till en exakt vetenskap från Kopernikus till modern atomfysik. Plancks kvantateori, Rutherfords sönderfallsteori samt Einsteins relativitetsteori och ljuskvantahypotes är milstolpar i händelseförloppet. Huvudparten ägnas åt atomteori, dels planetmodeller för elektronhöljet med de modifikationer, som införes av kvant- och vågmekaniken, dels atomkärnans uppbyggnad, omvandlingar och energi. Författarna lägger stor vikt vid att klargöra de

stora principiella förändringarna i den fysikaliska forskningens mål och möjligheter, från 1800-talets determinism till den moderna fysikens på diskontinuitet och statistik grundade uppfattning av materiens och energiens natur.

Den experimentella delen innehåller en beskrivning av 163 försök av varierande svårighetsgrad, många kan utföras med enkla medel, några få är så avancerade, att man nog måste avstå från dem. Kursen är brett upplagd efter följande linjer: spektra, elektrolys och jonisation i vätskor och gaser, strålning (vågor och korpuskler), konstantbestämningar (h, e och c) växelverkan mellan ljus och materia samt mellan ljus och elektricitet, materiens atomistiska struktur, elektronstötar, samt kärnfysik. I det sista kapitlet ges en förteckning på lämpliga radioaktiva preparat för skolbruk samt anvisningar om deras behandling — »inga försök bör göras med radioaktiva preparat av ren sensationslust». De flesta försöken är avsedda som lärardemonstrationer, men några kan även användas som elevlaborationer. Försöksbeskrivningarna grundar sig icke enbart på författarnas egna uppslag utan är i stor utsträckning även hämtade från andra håll, bl. a. artiklar i tidskriften Praxis. De är genomgående mycket instruktiva, och intresserade lärare kan säkert finna många originella och tidsbesparande uppslag som stöd för den undervisning i atomfysik, som numera är obligatorisk i svenska läroverk. Bådo böckerna rekommenderas varmt. *B. Grundström*

W. J. Wiltshire (Editor), *A further Handbook of Industrial Radiology*. By members of the Non-destructive Testing Group of the Institute of Physics. Edw. Arnold, London, 1957, Pp. 334, 50 s. net.

Boken har som författare fjorton specialister inom olika områden av radiologien, och Wiltshire som redigerat den har själv tidigare medverkat som författare i »The Handbook of Industrial Radiology» redigerad av professor J. A. Crowther och utgiven 1943. Trots att det i »A further Handbook of Radiology» är en helt ny redigering med i huvudsak nya författare täcker av naturliga skäl de båda böckerna varandra till en ganska stor del. Enligt förordet är den senare boken ej avsedd att ersätta den tidigare utan snarare att utgöra ett komplement till denna och förutsätter därför att läsaren besitter ett något större mått av grundläggande kunskaper i ämnet, än vad som är fallet med den tidigare boken. Det som väsentligen skiljer de båda böckerna är dock den utvidgade behandlingen av vissa ämnesområden i den nya boken, vilket betingats av nya metoder, möjligheter och tillämpningar inom radiologien, som framkommit sedan andra världskriget. Detta gäller exempelvis utnyttjandet av olika moderna acceleratorer för åstadkommande av elektronstrålning av energier på upp till 1000

MeV varmed högintensiv röntgenstrålning kan alstras. Vidare gäller det utnyttjandet av ett flertal radioisotoper, som blivit praktiskt användbara som strålningskällor, nyare synpunkter på sekundärstrålningens orsaker och verkan, samt mätmetoder och detektorer för röntgen- och gammastrålning osv.

Givetvis behandlas även ingående olika faktorers inverkan på den färdiga bildens informationskapacitet, som strålningskällans placering, anpassning av strålningens hårdhet till objektet, inverkan av filter och förstärkningsskärmar samt synpunkter på negativval, framkallning och reproduktion. Förutom att dessa områden ges en god teoretisk framställning saknas ej heller rent praktiska, värdefulla råd för röntgenoperatören. Detsamma gäller också de avsnitt, som berör röntgenundersökningar av exempelvis gjutgods och svetsar.

Ett flertal mera speciella områden inom radiologien behandlas även, såsom röntgenmikroskopi och -stereoskopi, röntgendiffraktion och fotografering med röntgenblixtaggregat. Att boken är helt up to date framgår exempelvis av att t. o. m. xeroradiografien fått ett eget kapitel. *T. Ramqvist*

E. Paskell (Editor), *Semiconductor Abstracts.* Volume III — 1955 Issue. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. 322, $ 10.00.

Underrubriken »Abstracts of Literature on Semiconducting and Luminescent Materials and Their Application» ger besked om bokens innehåll. För forskare och tekniker, som arbetar inom halvledarområdet, är det av stort värde med en väl genomarbetad samling av sammandrag av den synnerligen digra facklitteraturen. Volym III omfattar 1258 litteraturreferat från året 1955 med innehålls- och författarförteckning. Den har utarbetats av Solid State Division och Physical Chemistry Division av Battelle Memorial Institute.

Referaten är samlade under rubrikerna germanium, kisel, selen m. fl., intermetalliska föreningar, sulfider m. fl., oxider, halider, teori.

Sammandragen är väl genomarbetade och sparar mycket tid vid litteratursökning, men boken har dröjt väl länge med tanke på den snabba utveckling som halvledarfysiken just nu befinner sig i.

Gunnar Markesjö

The Physics and Chemistry of Life. Simon and Schuster, New York, 1955, Pp. 272, $ 1.45.

I denna lilla volym ha samlats 18 artiklar ur tidskriften Scientific American. De äro skrivna av kända fackmän, innehållsrika men lättlästa. Som exempel kunna nämnas: Livets uppkomst, Fotosyntesen, Proteinernas struktur och Ärftlighetens kemi. Många trevliga illustrationer, bara några formler, ingen matematik! *Bertil Englund*

Kosmos. Fysiska uppsatser utgivna av Svenska Fysikersamfundet. Bd 35, 1957, 209 s. Priset är för medlemmar av Fysikersamfundet kr. 14: — (jämte porto) för *inbundet* ex; bokhandelspriset är kr. 14: — för *häftat* ex. Medlemskap anmäles till fil. dr Sven Lennander, Seminarieg. 29, Växjö.

Av de 11 artiklarna i föreliggande årsbok har tre anknytning till det nu pågående geofysiska året, som behandlades mera utförligt i föregående band. I de övriga uppsatserna diskuteras kärnfysik och atomenergi.

Vad geofysiken beträffar presenteras det nya laboratoriet i Kiruna, och ingenjör Stoffregen diskuterar jonosfären i samband med norrsken. Undersökningar på detta område utföres vid jonosfärlaboratoriet utanför Uppsala. I den tredje uppsatsen behandlar docent Reiz solens och stjärnornas energiproblem. Energin alstras liksom i vätebomben genom sammanslagning av lätta atomkärnor, men troligen är det olika reaktioner i olika typer av stjärnor.

Framtidens energiproblem kommer kanske att lösas genom samma typ av kärnreaktioner som förekommer i stjärnorna, och docent Lehnert diskuterar problemet teoretiskt i uppsatsen »Kontrollerad vätekraft» och beskriver några av de viktigaste experimenten på detta område. Artikeln trycktes innan de senaste engelska och amerikanska resultaten publicerades i början av detta år men ger likväl det väsentligaste av den fysikaliska bakgrunden för försöken och pekar på några av de stora experimentella svårigheterna. — Ett av atomenergins svåraste problem, åtminstone ekonomiskt, är disponeringen av radioaktivt avfall. Denna fråga belyses i en uppsats av civiling. S. Lindhe.

Masspektrometri har kommit till allt större användning, och dess möjligheter framför allt för kemister behandlas i en intressant översiktsartikel av mag. Blomqvist och dr von Ubisch. I en annan översikt beskriver civiling. Blomqvist olika kärnmodeller.

Lic. Atterling redogör i en intressant uppsats för hur grundämnet 102, nobelium, för första gången framställdes vid Nobelinstitutet av ett svenskt-engelskt-amerikanskt forskarteam. Experimenten var tydligen mycket krävande och nog så spännande.

Nobelpristagarna i fysik presenteras traditionsenligt av dr Lennander och deras arbetsområde förklaras av doc. Bertil Nilsson under rubriken »Skiljer naturlagarna på höger och vänster? Om paritetsprincipen». Docent Torsten Lindqvists artikel om neutrinorekylexperiment och β-teori har ett visst samband med paritetsprincipen. Experimenten är mycket svåra och resultaten ännu så länge delvis motsägande, men artikeln presenterar ett intressant arbetsområde, där man troligen de närmaste åren kan vänta svar på många fundamentala frågor.

Sammanfattningsvis kan sägas att boken har en mycket hög standard. Den är skriven för fysiker men är av intresse även för ingenjörer och andra med fysikalisk utbildning, som här har möjlighet att utan större svårigheter bekanta sig med aktuella fysikaliska problem utanför sitt eget specialområde. *Josef Nyström.*

G. Charlot, *L'analyse qualitative et les réactions en solution.* Masson & Cie, Paris, 1957, 368 p., 3600 fr.

Härmed föreligger fjärde upplagan av Charlots välbekanta lärobok i kvalitativ oorganisk analys. Innehållet hör närmast hemma i den grundläggande undervisningen vid universitet och högskolor.

Behandlingen av pH-redox-fällnings- och komplexjämvikter (154 sid.), som utgör huvuddelen av första avdelningen, är pedagogiskt väl upplagd och ger ett värdefullt bidrag till förståelsen av den kvalitativa analysens reaktioner. I kapitlet om långsamma jämvikter får man exempelvis veta, att redoxjämvikter mellan joner som innehåller syre som regel är långsamma, och att vattenlösningar av $S_2O_8^{2-}$ och ClO_4^- inte oxiderar exempelvis Fe^{2+} och I^-, även om redoxpotentialen skulle tillåta detta. Dessa påpekanden är värdefulla och saknas ofta i de mera konventionella läroböckerna.

Reaktionsläran (190 sid.) är enligt anmälarens mening föredömlig. Läsaren slipper de i analysböcker annars så vanliga receptbetonade uppställningarna med alfabetiskt uppräknande av reagens och reaktioner. I stället ges för varje jon reaktionerna tillsammans med dess jämviktskonstanter i en värdefull och lättöverskådlig tabell. I den nya upplagan har många reaktioner och konstanter tillkommit och värdena på en del gamla har aktualiserats.

För varje jon är konstanttabellen kompletterad med en kortfattad beskrivning av hur jonen förändras, när lösningens pH ändras, varvid även för jonen viktiga komplex- och fällningsjämvikter beröres. Dessa beskrivningar är i många fall förtydligade med enkla löslighetsdiagram. Ett redoxresonemang ingår också i beskrivningen och behandlas i de flesta fall i anslutning till ett diagram, där E är avsatt som funktion av pH. Detta typiskt franska sätt att åskådliggöra redoxpotentialen i en lösning har tydligen alldeles särskilt omhuldats av Charlot, och för nästan varje beskrivet grundämne är ett sådant diagram uppritat. Man måste emellertid ifrågasätta värdet av dessa i de fall då de användes för att beskriva sådana system som exempelvis vanadin, där man över stora delar av pH-området har flerkärniga anjoner med omdiskuterade sammansättningar.

Behandlingen av analysgången i bokens sista avdelning (17 sid.) förefaller i sin korta koncisa form mycket tilltalande. För den oerfarne är den dock kanske alltför schematiserad.

En lärobok i kvalitativ oorganisk analys har ju som en av sina huvuduppgifter att ge läsaren goda minnesbilder av den oorganiska kemien och dess reaktioner. Detta syftemål skulle enligt anmälarens åsikt ha blivit bättre tillgodosett om färre organiska reagens kommit till användning.

Den senaste årens utveckling på analysens område borde ha beaktats mer än som skett. Så ägnas t. ex. knappt en sida åt den betydelsefulla användningen av jonbytare. *Nils Ingri*

Edgar Lederer and Michael Lederer, *Chromatography.* A Review of Principles and Applications. Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1957, Pp. 711, H. fl. 37: 50.

Författarna till föreliggande arbete besitter personligen rika erfarenheter inom det fält som de här gjort till sin uppgift att utförligt kartlägga. Den kompakta mängden av fakta, som de på ett i allmänhet klart och koncist sätt meddelar läsaren, imponerar.

Det är bokens andra, helt översedda och utökade upplaga, som nu utkommit. Den är indelad i fem avsnitt (Divisions): I. Adsorption Chromatography II. Ion Exchange Chromatography III. Partition Chromatography IV. Chromatography of Organic Substances V. Chromatography of Inorganic Substances.

Innehållet i vart och ett av dessa avsnitt är portionerat på ett överskådligt sätt i kapitel och sektioner, där författarna i kortfattad referatform, ständigt hänvisande till originallitteraturen, berättar om teknik och forskningsresultat från kromatografins olika och vidsträckta tillämpningsområden.

De enkla praktiska detaljerna, som snabbt kan föra in nybörjaren på området till effektivt arbete utan annan vägledning, finns medtagna. Boken förutsätter inte att läsaren har förkunskaper i ämnet. Den kan läsas som lärobok, men bör även betecknas som referenssamling eller handbok. Därför har den en viktig uppgift att fylla också på den mera avancerade läsarens bokhylla. Cirka 3800 hänvisningar till facklitteraturen är av stort värde för läsaren, inte minst på grund av omöjligheten att i ett enda band någorlunda fullständigt framställa kromatografiens resultat.

Anmälaren har på de områden inom vilka han själv arbetat endast hittat ett fåtal »referensluckor». Detta påpekande bör ej uppfattas som en anmärkning. I stort sett måste man kapitulera inför författarnas stora litteraturkännedom.

Genom bl. a. det rika och välvalda figurmaterialet har de här lyckats att åstadkomma en för alla kemiskt intresserade fängslande bok. Författarna är att gratulera till ett lyckat resultat av sina bemödanden.

Wilhelm Forsling

G. Ross Robertsson (Editor), *Modern Chemistry for the Engineer and Scientist.* McGraw-Hill Book Co., New York 1957, Pp. 442, $ 9.50.

Ett tjugotal amerikanska kemister, verksamma inom industrien eller grundforskningen, ge här utmärkta sammanfattningar av senaste resultat och metoder. Bland allt intressant som behandlas vill jag för min del särskilt framhålla den petrokemiska industrien, de organiska fluorföreningarna, användningen av radioaktiva isotoper och polypeptidkedjornas konfiguration (med Pauling själv som författare).

Den som vill lära känna de vetenskapliga och tekniska framstegen på kemiens fält har här en liten guldgruva. Typografi och bindning äro av högsta klass. *Bertil Englund*

A. J. Stepanoff, *Centrifugal and Axial Flow Pumps.* 2nd. Ed. Wiley & Sons, New York/Chapman & Hall, London, 1957, Pp. 462, $ 12.00.

Innehåll: Hydromekanikens grunder. Definitioner och terminologi. Centrifugalpumphjulets teori. Eulers pumpekvation. Specifikt varvtal. Diagonalpumphjul. Pumphus. Axialpumpar. Centrifugalpumpars karakteristikor. Mekaniska förluster, skivfriktion och läckförluster. Axialtryck. Kavitation i centrifugalpumpar. Speciella förhållande vid centrifugalpumpars drift. Speciella problem rörande pumpars konstruktion och användning. Kritiska varvtal för axlar. Speciella problem och användning av vertikala turbiner, axial- och centrifugalpumpar. Strålpumpar i kombination med centrifugalpumpar. Vattenslag i pumpsystem.

Författaren är chefkonstruktör vid den världsbekanta firman Ingersoll-Rand Company i USA vilket förklarar att de praktiska synpunkterna vid pumpars konstruktion fått en framträdande plats vid sidan av pumpteorier. I denna andra upplaga, den första utkom för snart 10 år sedan, har flera tillägg och ändringar företagits som betingats av utvecklingen. För att underlätta beräkningar av pumphjul för såväl centrifugal- som axialpumpar har det av författaren föreslagna diagrammet ytterligare utvecklats och torde nu täcka de flesta förekommande pumptyper. Ett problem, som varje konstruktör ställs förr eller senare inför, är vattenslag i pumpsystem, och detta har författaren på överskådligt sätt behandlat i det nytillkomna sista kapitlet. Figurer av utförda pumpkonstruktioner, varav märkes flera europeiska, är väl valda. Varje kapitel avslutas med talrika litteraturanvisningar. Tyvärr saknar undertecknad numeriska exempel över pumpars beräkningar, som i allt större omfattning förekommer i utländsk facklitteratur. Boken, som jämte Pfleiderers »Die Kreiselpumpen» kan anses vara ett standardverk inom pumpområdet, rekommenderas i första hand för pumpspecialister, men kan även med behållning studeras av elever vid tekniska högskolor. *Sven Nylinder*

H. F. Rase/M. H. Barrow, *Project Engineering of Process Plants.* Wiley & Sons, New York, Chapman & Hall, London, 1957, Pp. 695, $ 14.25.

Innehåll: Projekteringsingenjörens arbetsuppgifter, Anläggningarnas placering ur geografisk synpunkt, Utgångsdata för utarbetande av projekt, Projektering av kemiska anläggningar, Uppgörande av rörschemata, Fabriksområdets planering, Tidsplanering, Konstruktions-, ritnings-, inköps- och kontorsorganisation, Kontrakt med leverantörer, Teknisk utrustning, Tryckbehållare, värmeväxlare, pumpar, kompressorer och vakuumpumpar, elmotorer, ångturbiner, m. m., Rörledning och armatur, Isolationsmaterial, Övervakningsinstrument, Värme, vatten och avlopp m. m., Fundament för byggnader och maskiner, Byggnader och stålkonstruktioner, Säkerhetsanordningar, Anläggningens uppförande.

Boken är närmast avsedd för projekteringsingenjörer, som har att leda uppförande av kemiska fabriker. Det är intressant att iakttaga, vilken betydelse amerikanerna tillmäter organisatoriska och ekonomiska spörsmål i samband med planering av nya anläggningar. De uppställda formulären för affärsbrev, kontrakt mellan köpare och säljare osv. bör ge ingenjörer många värdefulla impulser på detta för dem ofta obekanta område. I kapitlet om teknisk utrustning, över 200 sidor, har såväl beräknings- och hållfasthetstekniska som drifttekniska problem behandlats på ett även för en maskinteknisk ingenjör ingående sätt. Boken kan rekommenderas alla projektingenjörer, som har att svara för uppförande av nya fabriker även med icke kemiskt tillverkningsprogram. *Sven Nylinder*

H. H. Mabie/F. W. Ocvirk, *Mechanisms and Dynamics of Machinery.* Wiley, New York/Chapman & Hall, London, 1957. Pp. 442, $ 8.50.

Vissa ämnesområden inom den maskintekniska facklitteraturen i USA synes f. n. i särskilt hög grad bli väl tillgodosedda med läroböcker. Inte minst har under de senaste åren ett anmärkningsvärt stort antal verk utgivits, som behandlar tillämpad dynamik och rörelsemekanismer. Förhållandet måste innebära, att dessa båda ämnesområden erhållit ökad betydelse och numera anses kräva utökade och fördjupade studier, åtminstone för vissa grupper av blivande maskintekniker. Förhållandet står i tydligt samband med de moderna maskinernas ständigt ökade arbetshastigheter och behovet av snabba och ofta komplicerade rörelsemekanismer för automatisk reglering och kontroll.

Förf:a till föreliggande bok, professorer vid Cornell University N. Y., anger i förordet, att de särskilt sökt tillgodose behovet av kurs-

litteratur i sådana ämnesavsnitt, som hittills behandlats alltför kortfattat eller också helt utelämnats i gängse läroböcker. Som exempel på dylika ämnesområden anger förf:a kamstyrningar, specialkuggväxlar, detaljer och mekanismer för räknemaskiner samt svängnings- och utbalanseringsproblem. Boken är uppdelad i tvenne huvuddelar, vardera omfattande ungefär lika många sidor: »Mechanisms» och »Dynamics of Machinery». Den förra utgör bokens kinematiska del, den senare dess kinetiska. Framställningen är klar men koncentrerad, och det är tydligt att förf:a förutsätter en någorlunda studietränad läsekrets med goda förkunskaper i såväl matematik som allmän mekanik. En elementär och mångordig framställning har avsiktligt undvikits. Förf:a har därigenom kunnat spänna över ett något större antal aktuella områden och vid behov kunnat tränga djupare in i en del av dessa.

Ett flertal genomräknade och väl kommenterade problem belyser utmärkt de framställda teorierna. Övningsuppgifterna — tyvärr utan angivna svar — är mycket talrika och anknyter ofta på ett förtjänstfullt sätt till dagsaktuella, praktiska problem. Boken bör räknas bland de värdefullare tillskotten till amerikansk maskinteknisk högskolelitteratur av i dag. *Elis Dahlin*

Joel Aversten, *Svetsning.* Svenska Bokförl./Bonnier, Stockholm, 1957, viii+123 s., inb. kr. 10: 50.

Boken ingår i serien »Läroböcker i verkstadsteknik» under redaktion av Erik Storm, Gunnar Meuller, Gert Nyberg, Elis Dahlin.

Boken behandlar i huvudsak gassvetsning och handbågsvetsning, men så viktiga grenar av svetstekniken som elektrisk motståndssvetsning och brännsvetsning behandlas endast inledningsvis. En allvarlig besvikelse är, att svetsningens speciella metallurgi helt förbigåtts; härigenom kommer boken att förfela sitt mål att vara en lärobok för de tekniska läroverken. Om man bortser från ett kort avsnitt om härdeffekter vid svetsning av stål — som omotiverat kommer under rubriken »Båggasskärning» — har de legerade stålens svetsteknik lämnats utan hänsyn, och några andra metaller än järn finns icke omnämnda. Vidare saknas nästan helt den behandling av kostnadsberäkningar som får anses vara nödvändig i en lärobok i verkstadsteknik. Bokens omfång skulle icke hava behövt bli mycket större, om en del av maskin- och utrustningsbeskrivningen krympts ner för att lämna plats åt mera önskvärda, för svetsundervisningen oumbärliga kapitel.

De områden av svetstekniken som kommit med synes vara väl behandlade. Möjligen ställer man sig undrande inför att författaren behandlat hårdlödning och mjuklödning under rubriken »Svetslödning». Figurmaterialet är rikligt och mestadels instruktivt. *Th. Forsner*

Pentti Kalaja, *Atlas över norra stjärnhimlen för Skandinavien.* Svenska Bokförlaget, Stockholm, J. W. Cappelens Forlag, Oslo, Gyldendalske Boghandel/Nordisk Forlag, Köpenhamn, Akademiska Bokhandeln, Helsingfors, 1958, kr. 12: 50.

»Atlas över norra stjärnhimlen för Skandinavien», som är utgiven av professor Pentti Kalaja vid Geodetiska Institutet i Helsingfors och ingår i serien Scandinavian University Books, återger i nio kartor stjärnhimlens utseende vid olika stjärntider. Den innehåller dessutom förteckningar över ljusare stjärnor, namnförklaringar och anvisningar på intressanta objekt synliga för blotta ögat eller i en liten kikare. Atlasen är trevligt utförd och lagom detaljerad för att bliva ett lämpligt hjälpmedel för amatörastronomer eller vem som helst som vill gå på upptäcktsfärd bland stjärnorna. *B. Svenonius*

Knut Parck, *Imitation av lyxvaror.* Kemisk teknik i Egypten under antiken. Lindstedts Univ. Bokh., Lund 1957, 60 s. kr. 3: 75.

På Victoriamuseet i Uppsala förvaras en märklig papyrus, en av de få papyrer, som har rent kemiskt-tekniskt innehåll. Den kallas vanligen Stockholmspapyren (Papyrus Holmiensis) och har grekisk text. En likartad papyrus finnes i Leiden. Det förefaller sannolikt att båda hämtats från samma sarkofag i Thebe.

Båda dokumenten innehålla kemiska recept, Stockholmspapyren 153, Leidenpapyren ett 90-tal. Recepten beröra framställning av legeringar mellan silver, guld, koppar, tenn och andra metaller, imitation av pärlor och ädelstenar, färgning av ull m. m.

Dr Parck har på ett lyckligt kritiskt sätt gjort ett urval ur de båda papyrerna, varvid han har begagnat Lagercrantz' tyska tolkning av Stockholms-papyren och Berthelots franska tolkning av papyren i Leiden.

En legering av guld och silver, som på egyptiska kallades *asem*, på grekiska *elektron*, förekommer gediген i naturen och var i gammal tid mycket uppskattad. Den var hårdare än rent guld och man sökte gärna imitera legeringen genom att använda koppar, tenn och bly. Zinken, som vi f. n. använda som utdrygningsmedel i våra s. k. silvermynt, var ännu okänd som metall i gammal tid. Men tendensen att genom legering med billiga metaller utdryga ädelmetaller fanns redan i antiken och knepet hade den vackra beteckningen »diplosis» eller »triplosis», alltså »fördubbling» eller »tredubbling». Den adekvata benämningen »förfalskning» undvek man alltså redan i antiken!

Bland recepten från gammal tid observerar man en anvisning, som stått sig i två tusen år, och som vi kalla avdrivning eller kapellering:

Forts. sid. 166.

Problemavdelning[1]

Matematiska uppgifter

2155) *Beräkna* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x}\,(2\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})/(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$.

X.

2156) *Två räta linjer a och b råkas i O. Normalerna från punkten P mot a och b skär resp. b i B och a i A. Sök orten för P, då fyrhörningen OAPB(O) bibehåller samma yta.* *X.*

2157) *I varje triangel ABC är* $\{p^4+(p-a)^4+(p-b)^4+(p-c)^4-a^4-b^4-c^4\} : T^2$ *ett och samma hela tal.*

V. Thébault

Enklare matematiska uppgifter[2]

2158) I varje triangel ABC är $\cos A \sin B \sin C+\sin A \cos B \sin C+\sin A \sin B \cos C-\cos A \cos B \cos C=1$.

2159) AB är diameter i en cirkel O med radien 1. Tangenten i en punkt M på cirkeln skär tangenterna i A och B i A_1 resp. B_1. Bestäm medelproportionalen till volymerna av de dubbelkoner som alstras av trianglarna ABM och A_1OB_1 vid rotation kring AB.

Svar: $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$.

2160) Volymerna av de kroppar som i uppg. 2159 alstras av cirkeln, trapetset AA_1B_1B och triangeln A_1OB_1 vid rotation kring diametern AB är V_1, V_2 och V_3 resp. Beräkna $(2V_3-V_2)/V_1$.

Svar: $\frac{1}{2}$. — Detta förhållande gäller även för en ellips som har AB till axel.

2161) Mellan vilka gränser varierar skillnaden mellan hypotenusan och tillhörande höjd i en rätvinklig triangel med given katetsumma, s?

Efter Cardano, 1500-talet

Svar: Mellan s (exklusive) och $\frac{1}{4}s\sqrt{2}$ (inklusive).

2162) Av en sfär bortskäres två segment, vilkas höjder förhåller sig som 2:3 och volymer som 1:2. Hur stor del av sfären har bortskurits?

Svar: 729:1331.

2163) Visa, att om $3x=(y+1)\sqrt{1-2y}$, så är $y(y-1)y''=1+(y')^2$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Banérgat. 33, Stockholm Ö.

[2] Uppg. 2158—2161 är insända av *X*, 2162—2166 av *I. Gunsjö*.

2164) En cirkel O går genom hörnen A och D i kvadraten $ABCD$ med sidan a samt skär sidorna AB och CD i E resp. F. Bestäm radien så, att bågen EF delar kvadratens yta mitt itu.

Svar: $0{,}5089a$. — Om medelpunktsvinkeln $EOF=x$, erhålles ekv. $3\sin x+2\cos x=2-x$. Grafisk lösning ger $x=158{,}62°$.

2165) Baskanterna i en tresidig pyramid är 4, 5 och 6 cm. Sidokanterna är alla 7 cm. Bestäm pyramidens volym.

Svar: $1{,}25\sqrt{279}=20{,}88$ cm³.

2166) Vilken punkt på linjen $5x-3y-70=0$ ligger lika långt från de båda tangenter, som från punkten (45; 19) kan dragas till cirkeln $3x^2+3y^2-12x+15y+7=0$?

Svar: (17; 5) och $(\frac{397}{11}; \frac{405}{11})$.

Lösningar till uppg. 2128—2130

2128) *P är en punkt på den kring den liksidiga triangeln ABC omskrivna cirkeln. Räta linjerna PA, PB, PC skär BC, CA, AB i punkterna A_1, B_1, C_1 resp. Visa, att $PA\cdot PB\cdot PC=PA_1\cdot PB_1\cdot PC_1$.*

Sats av J. Steiner

Triangeln APC är likformig med C_1PB. Då erhålles $PA\cdot PB=PC\cdot PC_1$. P. s. s. blir $PC\cdot PA=PB\cdot PB_1$ och $PB\cdot PC=PA\cdot PA_1$, varav genom ledvis multiplikation påståendet. *X.*

Även löst av *J. A. Sandelin, E. R. Levanto, E. Samén.*

2129) *En cirkel med centrum C och radien R samt en punkt $O\neq C$ ej belägen på cirkeln är givna. En rörlig linje genom O skär cirkeln i A och B. På linjen avsättes $\overrightarrow{ON}=m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}$ (m och n konstanter, $m\neq n$). Sök enveloppen för normalen i N mot linjen.* *X.*

I. Med O som origo, OC som x-axel, C i punkten $(c; 0)$ samt vinkeln $COA=v$ blir $OA=k+c\cos v$, $OB=-k+c\cos v$ och $ON=(m+n)c\cos v+(m-n)k$, där $k=\sqrt{R^2-c^2\sin^2 v}$. Normalen i N skär x-axeln i en punkt med abskissan $x_0=(m+n)c+(m-n)k/\cos v$ och dess ekvation är

$$y=-\cot v\,(x-x_0)\equiv-\cot v\,[x-(m+n)c]+(m-n)\sqrt{R^2-c^2+R^2\cot^2 v}.$$

Man ser nu, att normalen tangerar en ellips eller hyperbel med centrum i $[(m+n)c; 0]$ och halvaxlarna $|m-n|R$ och $|m-n|\sqrt{|R^2-c^2|}$, allt eftersom $R>c$ eller $R<c$. Excentriciteten är c/R. *S. B.*

II. Man kan genom en likställighetstransformation $(O; 1/n)$ ernå, att $n=1$ och $m=\alpha\neq1$. Då är $\overrightarrow{ON}=(\alpha-1)\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Konstruera $\overrightarrow{OF}=2\overrightarrow{OC}$, så är avståndet FN_1 från F till normalen (till tecken och storlek) $=(\alpha-1)OA$, ty avståndet från O till den med normalen

parallella linjen genom F är $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Likställighetstransformationen $(O;\ a-1)$ överför C i C_1; parallellförflyttas C_1 vektorn $\overrightarrow{OF}$, erhålles cirkeln C_2, som är ort för N_1. Enveloppen är alltså ett kägelsnitt med principalcirkeln C_2 och en brännpunkt i F. *X.*

2130) *I parallelltrapetset $ABCD$ är BC och AD parallella. P är en punkt utanför AB. Linjerna CQ och DQ är parallella med AP resp. BP. Visa, att P ligger lika långt från CD som Q från AB, då bägge avstånden mätes i trapetsbasernas riktning.* *V. Thébault*

I. Lägg B i origo, A i $(a;\ 0)$, C i $(0;\ c)$ och D i $(a;\ ak+c)$, där k är vinkelkoeff. för CD. Om $P\,(p;\ q)$ och $Q\,(m;\ n)$, är $q/(p-a)=(n-c)/m$ och $q/p=(ak+c-n)/(a-m)$ eller $qm=(p-a)(n-c)$ och $aq-qm=akp-p(n-c)$, varav genom addition $aq=akp-a(n-c)$ eller $n=kp+c-q$, ett samband, som innehåller påståendet. *S. B.*

Även löst av *J. A. Sandelin.*

II. Om i sexhörningen $APBC'Q'D'$ (A) motstående sidor är parallella två och två samt Q' ligger på linjen AB, så går $C'D'$ genom P, ett redan av Pappos känt faktum, som kan inordnas under Pascals sats. Parallellförflytta nu CQD i trapetsbasernas riktning till läget $C'Q'D'$ med Q' på AB. Enligt hjälpsatsen är då de avstånd, varom lydelsen handlar, bägge $=0$ i trapetset $ABC'D'$ och därav följer genast, att de är lika i trapetset $ABCD$. *X.*

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen

Mars 1958

Matematiska uppgifter[1]

Reallinjens matematiska gren

1. Beräkna ytan av det slutna område, som begränsas av parablerna $y^2=4x$ och $x^2=4y$.
2. Funktionerna »sinus hyperbolicus för x» $(\sinh x)$ och »cosinus hyperbolicus för x» $(\cosh x)$ definieras på följande sätt:

$$\sinh x=\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\quad \cosh x=\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x}).$$

   Bevisa formlerna

   $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$; $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$; $\cosh 2x=\cosh^2 x+\sinh^2 x$.
3. O är medelpunkten i en cirkel, och P är en punkt, belägen på ett avstånd från O, som är $1\frac{1}{2}$ gånger cirkelns radie. Från P är en sekant dragen, som skär cirkeln i punkterna A och B. Vinkeln OPA är tredjedelen av vinkeln AOB. Beräkna vinkeln OPA.

[1] Enligt gymnasieformen av år 1953, som tillämpas vid studentexamen fr. o. m. v. t. 1957.

4. En kropp begränsas av två koncentriska sfäriska ytor, den yttre med den konstanta radien R, den inre med den variabla radien x. Ett tangentplan till den inre sfären delar den nämnda kroppen i två delar. Bestäm x, så att volymen av den större av delarna blir så stor som möjligt.

5. Bestäm konstanten a, så att funktionen $\frac{ax^2}{x-1}$ får ett maximum $=-4$.

6. En hyperbel är liksidig, dvs. transversalaxeln är lika med konjugataxeln. Den ena grenen tangerar i vertex y-axeln i ett rätvinkligt koordinatsystem. Samma gren går genom punkten $(-3;\ 0)$. Sök och konstruera orten för vertex på hyperbelns andra gren. Därvid skall undersökas, om orten består av hela den mot den erhållna ekvationen svarande kurvan.

7. Bestäm $\lim_{x\to 0} y$ och $\lim_{x\to 0} \frac{dy}{dx}$ för funktionen $y=\frac{x^2}{\sin 2x}$. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att utseendet av den mot funktionen svarande kurvan skisseras för $-\pi \leqq x \leqq \pi$.

8. Två punkter, P_0 och P_1, på parabeln $x^2=4ay$ har x-koordinaterna x_0 respektive x_1. Bestäm koordinaterna för skärningspunkten R_1 mellan kurvans normaler i P_0 och P_1. När punkten P_1 obegränsat närmar sig punkten P_0, dvs. när $x_1 \to x_0$, närmar sig R_1 obegränsat en punkt R_0. Ange dennas koordinater som funktioner av x_0. Bestäm därefter ekvationen för orten för R_0, när P_0 genomlöper parabeln. — Det erfordras inte men betraktas som en förtjänst, att ortkurvan konstrueras i stora drag.

Resultat: **1.** $5\frac{1}{3}$ ytenh. — För parablerna $y^2=px$ och $x^2=qy$ blir svaret $\frac{1}{3}pq$. **3.** $28{,}96°$. **4.** $\frac{1}{5}R\sqrt{5}$. **5.** $a=-1$. **6.** Orten utgör den del av parabeln $y^2=3(x+3)$ för vilken $x>0$. **7.** $\lim_{x\to 0} y=0$; $\lim_{x\to 0} y'=\frac{1}{2}$. Asymptoter: $x=\frac{1}{2}n\pi$; infl. och centrum i origo. Max. i $(2{,}137;\ -5{,}04)$ och min. i $(-2{,}137;\ 5{,}04)$. **8.** Ortens ekv. är $4(y-2a)^3=27ax^2$ med spets och lodrät tangent i $(0;\ 2a)$.

Reallinjens biologiska gren

1. En triangels hörn är belägna i punkterna $(0;\ 0)$, $(3;\ 6)$ och $(9;\ 0)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Beräkna förhållandet mellan de delar, i vilka triangelns yta delas av kurvan $y=x^2-4x+5$.
2. Den räta linjen $y=4x+7$ är tangent till kurvan $y=ax^3+bx^2+cx+d$ i den punkt, vars x-koordinat är -2. Den räta linjen $y=x+1$ är normal till kurvan i den punkt, där denna skär y-axeln. Bestäm

konstanterna a, b, c och d. Undersök därefter kurvan med avseende på maximi- och minimipunkter, samt konstruera den i dess huvuddrag.

3. Hörnen i två parallella begränsningsytor $ABCD$ och $A'B'C'D'$ i en kub är så betecknade, att AA', BB', CC' och DD' är kanter i kuben. Bestäm förhållandet mellan volymerna av tetraedrarna $AB'CB$ och $AB'CD'$.
4. Se matem. gren 2.
5. Den räta linje, som i en likbent triangel drages genom basens ena ändpunkt och medelpunkten för den kring triangeln omskrivna cirkeln, delar en av de lika sidorna i förhållandet 2:3 från spetsen räknat. Beräkna triangelns vinklar.
6. Basradien i en rät cirkulär cylinder är 1 längdenhet, medan cylinderns höjd varierar. En sfär tangerar cylinderns båda plana ytor i dessas mittpunkter och skjuter icke utanför cylindern. Undersök och åskådliggör grafiskt, hur volymen av den del av cylindern, som ligger utanför sfären, varierar, då sfärens radie ändras. Ange särskilt det största värde, som den nämnda volymen kan anta.
7. I en oändlig geometrisk serie är termerna funktioner av en variabel x. Summan av första och tredje termen är 7, och summan av andra och fjärde termen är $2x^2-20x+25$. Undersök, för vilka värden på x serien är konvergent.
8. Funktionen $a(x+b)(x+a+b)$ är negativ för alla reella värden på x, utom då $20 \leqq x \leqq 30$. Bestäm konstanterna a och b, och ange, vilka värden funktionen kan anta.

Resultat: **1.** 5:13. **2.** $a=\frac{1}{4}$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=-1$, $d=1$. Max. i $(-\frac{2}{3}; \frac{8}{27})$, min. i $(2; -1)$. **3.** 1:2. — Gäller med samma bevis för varje parallellepiped. **5.** 41,410°; 69,295°; 69,295°. **6.** Om sfärens radie är x och den sökta volymen V, blir $V=2\pi(x-\frac{2}{3}x^3)$, där $0<x\leqq 1$. Volymen växer med x till max. $\frac{2}{3}\pi\sqrt{2}$ för $x=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, avtar sedan till $\frac{2}{3}\pi$ för $x=1$. **7.** $1<x<2$ eller $8<x<9$. **8.** $a=-10$; $b=-20$. Funktionen kan anta alla värden $\leqq 250$. — Insättning av stora x-värden visar att $a<0$. Enl. det angivna villkoret måste funktionen ha formen $y=a(x-20)(x-30)$, dvs. *antingen* $b=-20$ och $a+b=-30$ *eller* $b=-30$ och $a+b=-20$. Endast det förra alternativet ger $a<0$.

Allmänna linjens sociala gren

1. En punkt B på ena vinkelbenet av en 30° vinkel BAC tages till medelpunkt för en cirkel med 10 cm radie. Cirkeln skär det andra vinkelbenet i punkterna C och D. Ytorna av trianglarna ABC och ABD förhåller sig som 1:2. Beräkna längden av sträckan AB.

2 och 3. Se biol. gren 1 och 2.

4. Funktionerna »sinus hyperbolicus för x» ($\sinh x$) och »cosinus hyperbolicus för x» ($\cosh x$) definieras på följande sätt:

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Bevisa, att $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2$ har ett av x oberoende värde, och bestäm detta.

5. En person, som hade sina pengar placerade mot 5 % ränta, frigjorde i början av år 1948 120 000 kr och köpte för denna summa en egendom. Under åren 1948 t. o. m. 1957 gav egendomen ingen nettoavkastning utan erfordrade i stället en årlig nettoutgift av 4000 kr för underhåll och förbättringar. Denna utgift tänkes utgå vid slutet av vart och ett av dessa år. Vid början av år 1958 sålde personen egendomen för 160 000 kr. Hur stor vinst eller förlust kan han därvid sägas ha gjort vid tidpunkten för försäljningen? Ingen hänsyn tages till penningvärdets försämring.

6, 7 och 8. Se biol. gren 3, 6 och 7.

Resultat: 1. $\sqrt{300} = 17{,}32$ cm. 4. Det efterfrågade värdet är $= 1$. 5. Förlust på 85 800 kr.

Matematiska uppg. för latin- och realgymnasiet

Enl. 1933 års stadga

Latingymnasiet

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} y^2 - 4x^2 = y - 2x \\ 5x^2 + 2xy = x - 2y \end{cases}$

2. Se social gren 1.

3. I en konvergent oändlig geometrisk serie bildar kvoten, första termen och summan i nämnd ordning de tre första termerna i en annan konvergent oändlig geometrisk serie. Summan av termerna i den senare serien fr. o. m. den andra understiger summan av den ursprungliga serien med $\frac{13}{16}$. Vilken är den ursprungliga serien?

4. Vinkeln A i triangeln ABC är 60°. Dess bisektris delar den motstående sidan i förhållandet 3:8. Bestäm triangelns övriga vinklar.

5. I en likbent triangel är avståndet mellan medelpunkterna i den inskrivna och den vid triangelns bas vidskrivna cirkeln dubbelt så stort som höjden mot basen. Beräkna triangelns vinklar.

6. I en triangel ABC är sidan AB 10 cm. Vinkeln B delas i tre lika stora delar av räta linjer, som råkar sidan AC i punkterna D respektive E; punkten D ligger närmast hörnet A. Sträckorna AD och BE är 4 cm respektive 15 cm. Beräkna ytan av triangeln ABC.

7. Bestäm värdet av konstanten a, så att den ena roten till ekvationen $\dfrac{3ax}{3a+1} + \dfrac{3a+1}{x} = 3 + a$ blir dubbelt så stor som den andra.

8. I en halvcirkel med diametern $AB=10$ cm är C en punkt på diametern. Sträckan AC har längden $2x$ cm. Med sträckorna AC och CB som diametrar uppritas halvcirklar åt samma håll som den ursprungliga halvcirkeln. Den gemensamma tangenten till de båda mindre halvcirklarna i punkten C skär den ursprungliga halvcirkelbågen i punkten D. En cirkel inskrives i den figur, som begränsas av sträckan CD, cirkelbågen AD samt halvcirkelbågen AC. Radien i denna cirkel är y cm. Bestäm y som funktion av x, och undersök grafiskt eller på annat sätt, om y har något maximum eller minimum, när x antar de värden, som är möjliga.

Resultat: 1. $x=0$, $-\frac{1}{3}$, 1, 2 och $y=$resp. 0, $-\frac{2}{3}$, -1, -3. 3. $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$, ... 4. 98,22°, 21,78°. 5. 51,83°, 51,83°, 76,34°. 6. $\frac{375}{8}\sqrt{7}=124$ cm². 7. 6 eller 1,5. — Sättes $y=3ax/(3a+1)$, fås ekv. $y^2-(3+a)y+3a=0$ med rötterna 3 och a, som har samma egenskap som ifrågavarande x-rötter, dvs. antingen är $a=2\cdot 3$ eller $3=2\cdot a$. 8. $y=0{,}2\,[6{,}25-(x-2{,}5)^2]$ med max. $=1{,}25$ för $x=2{,}5$.

Realgymnasiet. Allmän kurs

1 och 2. Se biol. gren 2 och 3.

3 och 4. Se matem. gren 3 och social gren 5.

5, 6 och 7. Se biol. gren 6, 7 och 8.

8. Undersök kurvan $y=x^n-2x+1$, där n är ett positivt helt tal, med avseende på maximi- och minimipunkter. Undersök, vilka huvudtyper kurvan uppvisar för olika värden på n, och åskådliggör dessa i skilda diagram.

Resultat: 8. För $n=1$ utgör kurvan en rät linje och för $n=2$ parabeln $y=(x-1)^2$. Om n är ett *udda* tal >1, har derivatan *två* nollställen, det positiva ger ett min. och det (numeriskt lika) negativa ett max. Kurvan går alltid genom $(-1;\ 2)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 0)$ och är *symmetrisk* m. a. p. $(0;\ 1)$. Infl.tg. är $y=-2x+1$. Om n är ett *jämnt* tal >2, har derivatan *ett* nollställe, för vilket min. inträffar. Kurvan går alltid genom $(-1;\ 4)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ 0)$. Den berör linjen $y=-2x+1$ i $(0;\ 1)$ men ligger för övrigt över denna linje. Inflexion saknas.

Realgymnasiet. Specialkurs

1. Cirkeln $2x^2+2y^2=7b^2$ skär den ena grenen av hyperbeln $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ i punkterna A och B. Kordan AB går genom en av brännpunkterna. Hur stor är hyperbelns excentricitet?

2. För funktionen $y=f(x)$ gäller, att $y\neq 0$ och att $\frac{dy}{dx}=y\sin x$. Bestäm de värden på x, för vilka $\frac{d^2y}{dx^2}=y\cos 2x$.

3. För variablerna x och y gäller sambandet $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$, där a, b och r är konstanter. Bevisa, att för $y \neq b$ gäller likheten

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 : \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = r^2.$$

4. I ellipsen $x^2+2y^2=2$ är AB en korda, som är parallell med den större axeln. Ellipsnormalerna i punkterna A och B skär varandra i punkten C; D är den ändpunkt av den mindre axeln, som ligger på andra sidan AB i förhållande till C. Vilket är det största värde, som ytan av fyrhörningen $ACBD$ kan anta?
5. I två givna parabler, $y^2=2p(x-b)$ och $x^2=2p(y-c)$, drages kordor, som har samma riktning. Motsvarande diametrar i de båda parablerna eller deras förlängningar skär varandra i punkten P. Sök och konstruera orten för P, när kordornas riktning varierar.
6. En regelbunden fyrsidig pyramid har konstant total begränsningsyta. Hur stor är vinkeln mellan två närliggande sidoytor, när pyramiden har största möjliga volym?
7. Från ett klot med radien 5 cm har man bortskurit ett sfäriskt segment med höjden 1 cm. I det återstående sfäriska segmentet inskrives en rät cirkulär cylinder, vars ena bottenyta antingen ligger i segmentets plana begränsningsyta eller är parallell med denna. Bestäm cylinderns volym som funktion av dess bottenradie x cm. Undersök därefter, hur denna funktion varierar inom de för x bestämda gränserna, samt åskådliggör detta med ett diagram. Ange speciellt, hur många procent av segmentets volym cylinderns volym högst kan utgöra.

Resultat: 1. $\sqrt{3}$ eller $\sqrt{1{,}5}$. 2. $2n\pi$ och $\pm 2{,}301+2n\pi$. 4. $\frac{3}{4}\sqrt{6}$ ytenh. 5. Hyperbeln $xy=p^2$. 6. $96{,}38°$ ($\cos\alpha=-\frac{1}{9}$). 7. Om volymen är y cm^3, fås $y=\pi x^2(4+\sqrt{25-x^2})$ för $0<x\leqq 3$ och $y=2\pi x^2\sqrt{25-x^2}$ för $3\leqq x<5$. Första funktionen ökar från 0 till 72π inom sitt område, den andra växer från 72π till max. $\frac{500}{9}\pi\sqrt{3}$ för $x=\frac{5}{3}\sqrt{6}$ och avtar sedan, då $x\to 5$. Kurvorna bildar ett hörn för $x=3$. Cylinderns volym maximalt 59,4 % av segmentets.

Uppgifter i fysik

1. Två sammankopplade godsvagnar har råkat i drift på en bandel, vars lutning är tillräckligt stor för att deras rörelse skall bli accelererad. Vardera vagnen väger 16 ton. Den främre vagnen är av äldre typ och dess friktionsmotstånd uppskattas till 0,6 % av tyngden. Den bakre vagnen är modern och dess friktionsmotstånd uppskattas till 0,1 % av dess tyngd. Beräkna den kraft, varmed

den bakre vagnen trycker mot den främre under rörelsen. Figur kräves; i denna skall återfinnas de krafter, som åberopas vid lösningen.

2. Marsmånen Phobos gör ett varv runt Mars på 7 timmar 39 min. Massan hos planeten Mars är $6{,}6 \cdot 10^{23}$ kg. Man får anta, att Mars och Phobos är homogena sfärer och att Phobos rör sig i en cirkulär bana med Mars i centrum. Två sfäriska kroppar, vardera med massan 1 kg, attraherar varandra med en kraft av $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ newton, då avståndet mellan deras medelpunkter är 1 m. Vilket värde på avståndet mellan de båda himlakropparnas medelpunkter kan man beräkna ur dessa uppgifter? (1 newton $= 10^5$ dyn).
3. I ena änden av en smal, rak, homogen och jämntjock stav är ett lätt snöre fastgjort. Stavens andra ände vilar mot en horisontell bordsyta. Om man drar i snöret i en riktning snett uppåt, kan man få staven att glida utmed bordsytan på sin nedre ände. Vid ett försök med staven fick man den att glida med konstant hastighet, när staven bildade vinkeln 30° och snöret vinkeln 80° med horisontalplanet. Stavens och snörets riktningar bildade då 50° vinkel med varandra. Vilket värde på friktionskoefficienten mellan staven och bordsytan ger detta försök?
4. Ett litet föremål befinner sig på huvudaxeln till en tunn positiv lins med brännvidden 48 cm och på avståndet 80 cm från linsen. På andra sidan om linsen och på 96 cm avstånd från denna har man ställt en skärm vinkelrätt mot linsens huvudaxel. Någon tydlig bild erhåller man därvid ej på skärmen. Genom att på lämpligt ställe mellan linsen och skärmen införa en annan tunn positiv lins med brännvidden 18 cm, kan man emellertid erhålla en skarp bild på skärmen. Var skall denna lins placeras? De båda linsernas huvudaxlar sammanfaller. Figur återgivande strålgången erfordras. Föremålet får därvid betraktas som punktformigt.
5. En stråle enfärgat ljus infaller mot ena sidoytan AB av ett tresidigt glasprisma BAC, där den brytande vinkeln A är 50,0° och prismats brytningsindex är 1,51. Infallsvinkeln är sådan, att strålen inuti prismat går vinkelrätt mot bisektrisen till brytande vinkeln. Ett annat tresidigt glasprisma $B_1A_1C_1$ med brytande vinkeln A_1 och med brytningsindex 1,74 placeras så, att ytan A_1C_1 ligger an mot ytan AC och så, att vinkeln A_1 är vänd åt motsatt håll mot vinkeln A. Prismornas brytande kanter blir därvid parallella. Hur stor skall det andra prismats brytande vinkel A_1 vara, för att den ovannämnda strålen skall fortsätta genom detta prisma i en riktning, som är vinkelrät mot bisektrisen till vinkeln A_1? Ljusstrålen genomlöper båda prismorna i ett för dessa gemensamt huvudsnitt. Figur utvisande strålgången erfordras.

6. Ett ackumulatorbatteri och två motstånd, vartdera med resistansen 1200 ohm, seriekopplas så, att det hela bildar en sluten krets. En voltmeter inkopplas först parallellt med båda motstånden och sedan parallellt med endast det ena motståndet. I första fallet visar voltmetern 10,0 V, i det senare fallet visar den 4,0 V. I bägge fallen är samma mätområde på voltmetern inkopplat. Beräkna härur voltmeterns resistans. Batteriets och ledningstrådarnas resistanser lämnas utan avseende. Kopplingsschema erfordras.
7. Under en laboration var två lärjungar sysselsatta med bestämning av den elektriska värmeekvivalenten (Joules konstant). Var och en var utrustad med ett skjutmotstånd, en amperemeter, en trådspiral och en kalorimeter innehållande vatten. Den ene tog ström från ett ackumulatorbatteri med emk 10,0 V och hade en trådspiral *AB* med resistansen 8,0 ohm; den andre tog ström från ett batteri med emk 8,0 V och hade en trådspiral *CD* med resistansen 4,0 ohm. De reglerade skjutmotstånden så, att strömstyrkan blev exakt 1 A, och genomförde sina bestämningar. Därpå kom de på den idén att sätta båda spiralerna i samma kalorimeter utan att ändra inställningen på skjutmotstånden. Det råkade därvid bli kortslutning mellan de båda klämskruvarna vid *A* och *C* samt mellan de båda klämskruvarna vid *B* och *D*. Hur mycket ändras genom kortslutningen den totala i spiralerna utvecklade effekten? Klämskruvarna *A* och *C* ligger närmast respektive batteris positiva pol. Kopplingsscheman för samtliga fall erfordras.
8. Plutoniumisotopen ^{239}Pu är alfa-radioaktiv och sönderfaller enligt schemat

$$^{239}\mathrm{Pu} \longrightarrow {}^{235}\mathrm{U} + {}^{4}\mathrm{He}\ \text{(alfa-partikel)}.$$

Alfapartiklarna utgår med en rörelseenergi av 5,1 MeV, och samtidigt slungas de bildade ^{235}U-atomerna åt motsatt håll med rörelseenergin 0,1 MeV. Ett stycke ^{239}Pu med vikten 120 g nedsänkes i en kalorimeter, som innehåller flytande kväve. Den radioaktiva strålningen når ej utanför kalorimetern. Sedan temperaturjämvikt inträtt, förångas samma mängd kväve per tidsenhet som när 0,23 W tillföres kalorimetern på elektrisk väg. Hur stor bråkdel av totala antalet ^{239}Pu-atomer sönderfaller per sekund? En gramatom ^{239}Pu väger 239 g och innehåller $6{,}0 \cdot 10^{23}$ atomer. Energienheten 1 MeV = $= 1{,}60 \cdot 10^{-13}$ joule (wattsek).

Resultat: 1. 40 kp. 2. 9500 km. 3. 0,22. 4. 12 cm framför skärmen. 5. 43,0°. 6. 2400 ohm. 7. 2,5 W. 8. Bråkdelen $9{,}2 \cdot 10^{-13}$ av Pu-atomerna sönderfaller per sek.

Realexamen och praktisk realexamen v. t. 1958

I. Provräkning i realexamen

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} \frac{3x}{5}-(1-4y)=0 \\ x-10\left(4y-\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases}$

2. Ett abonnemangskort till en viss teater kostar 8 kr och berättigar innehavaren att under ett år erhålla 20 % rabatt på sina egna teaterbiljetter. En person, som begagnade sig av ett sådant kort, såg under ett år 9 föreställningar och satt på en plats, som utan rabatt skulle ha kostat 9 kr 50 öre varje gång. Hur många procent billigare blev tack vare abonnemangskortet den sammanlagda kostnaden för hans teaterbiljetter under detta år?

3. Förenkla uttrycket

$$\frac{1+a}{1-a}-\frac{1-a}{1+a}$$

och beräkna därefter dess värde för $a=\frac{2}{3}$.

4. För att torv lättare skall torka, skäres den i småstycken. Hur många gånger större blir ytan av 1 m³ torv i stycken med dimensionerna 20 cm × 20 cm × 5 cm än ytan av samma mängd torv i ett enda kubformigt stycke?

5. ABC är en triangel, i vilken sidorna AC och BC är lika långa. Från A drages en rät linje genom den omskrivna cirkelns medelpunkt. Denna linje råkar sidan BC i punkten D. Hur stora är triangelns vinklar, om vinkeln ADB är 75°?

6. En svensk affärsman importerar televisionsapparater från Västtyskland. Fakturapriset för en apparat är 900 DM. Tull och frakt samt övriga inköpskostnader utgör 15 % av detta pris. Vid försäljningen beräknar han $33\frac{1}{3}$ % pålägg. Hur många procents rabatt kan han sägas ha lämnat en kund, som har betalat 1000 kr kontant och dessutom lämnat en 3 månaders växel å 680 kr, vilken omedelbart har diskonterats efter 6,5 %? 100 DM=125 kr.

7. Vinkeln B i triangeln ABC är trubbig. Sidan AB är 13 cm, sidan BC 11 cm samt höjden från A 12 cm. Höjden från B träffar sidan AC i punkten D. Beräkna sträckorna AD och BD.

8. Ett rakt prisma har höjden 14 cm. Basytan $ABCD$ utgöres av en fyrhörning, i vilken $AB=10$ cm, $BC=5$ cm, CD=6 cm och vinkeln B är rät. Prismat kan inskrivas i en rät cylinder, varvid prismats basytor kommer att ligga i cylinderns basytor och fyrhörningen $ABCD$ blir inskriven i cylinderns ena bascirkel. Beräkna volymen av den del av cylindern, som befinner sig utanför prismat. Som närmevärde på π användes 3,14.

Resultat: **1.** $x=\frac{5}{4}$; $y=\frac{1}{4}$. **2.** 10,6 %. **3.** $4a/(1-a^2)$; 4,8. **4.** 10 ggr. **5.** 65°, 65°, 50°. **6.** 3,2 %. **7.** $AD=11{,}2$ cm och $BD=6{,}6$ cm. **8.** 628 cm³.

II. Provräkning i realexamen, avkortad kurs

1. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 3x+y-1=0 \\ x-2y+1=0 \end{cases}$
2. Som närmevärde på π användes vanligen talen 3,14 och $\frac{22}{7}$. Vilket av dessa tal är störst, och hur stor är skillnaden mellan dem, uttryckt i allmänt bråk?
4. En person hade under ordinarie arbetstid — åtta timmar per dag — en timpenning av 4 kr. För övertid var timpenningen 50 % högre. En dag hade han, enligt vad han räknade ut, i medeltal haft 4,40 kr/tim. Beräkna med ledning av dessa uppgifter, hur många timmar han denna dag hade arbetat på övertid.
6. Andersson köpte den 3 mars en bil av Pettersson på följande villkor. Andersson accepterade samma dag en av Pettersson utställd fyra månaders växel på 2500 kr samt överlät till Pettersson 6 st 3,5 % obligationer å nominellt 1000 kr med ränteterminer den 15 april och 15 oktober. Tre dagar senare diskonterade Pettersson växeln i en bank mot 6 % och sålde obligationerna till 90 % kurs. Hur mycket fick då Pettersson sammanlagt för bilen?
7. En person gick från A till B längs en landsväg med en hastighet av 90 m/min. Efter ett uppehåll på 35 min i B återvände han till A längs en stig, vars längd är 20 % kortare än landsvägen mellan A och B men på vilken hans hastighet minskades till 4,5 km/tim. Då han återkom till A, hade han varit borta 2 tim 13 min. Hur långt är det mellan A och B längs landsvägen? Hur mycket vann eller förlorade han i tid genom att på återvägen gå längs stigen?

Uppg. 3, 5, 8 utgjordes av uppg. 2, 4, 6 i provräkning I.

Resultat: **1.** $x=\frac{1}{7}$; $y=\frac{4}{7}$. **2.** Det senare är $\frac{1}{350}$ större. **4.** 2 tim. **6.** 7933,50 kr. **7.** 4,5 km; han vann två min.

III. Provräkning för huslig linje

Uppg. 1—6 i provräkning I och 4 i II samt 6 i IV; i den sistnämnda uppg. skall ytan beräknas med hjälp av mätning av sträckan i figuren, alltså ej exakt. — Av utrymmesskäl har uppg. för handelslinjen ej kunnat medtagas.

IV. Provräkning för maskinteknisk linje

2. Beräkna rötterna till ekvationen $x^2-3{,}826x+1{,}83^2=0$ med 3 decimaler.

5. I en rätvinklig triangel delar höjden mot hypotenusan denna i två delar, vilkas längder är 4,608 respektive 6,492 dm. Hur stor är den inskrivna cirkelns radie?
6. En tomt har formen av en fyrhörning $ABCD$ med sidorna $AB=60$ m, $BC=25$ m, $CD=39$ m, $DA=52$ m samt med diagonalen $BD=56$ m. Rita tomten i skalan 1 : 500, och beräkna exakta värdet på tomtens yta.
8. Från en punkt A på en cirkels periferi drages dels diametern AB, dels en sekant AC, som skär tangenten genom B i punkten C och cirkeln i punkten D. Genom D drages tangenten till cirkeln. Den skär BC i punkten E. Hur lång är sträckan BE, om $AC=13$ cm och AB är 7 cm längre än BC?

Uppg. 1, 3, 4, 7 utgjordes av uppg. 4, 5, 7, 8 i provräkning I.

Resultat: **2.** 2,470 och 1,356. **5.** 2,27 dm. **6.** 1764 m². **8.** 2,5 cm.

V. Uppgifter i fysik för maskinteknisk linje[1]

1. Ett U-rör, vars skänklar är vertikala och har respektive 20 mm och 10 mm inre diameter, innehåller en del vatten. Ovanpå detta häller man i det vidare röret 10 cm³ av en vätska, som har mindre täthet än vatten och som ej blandar sig med vatten. Om vattenytan i det vidare röret därvid sjunker 5 mm, vilket värde på vätskans täthet får man härav?
2. En stege lutar mot en vertikal vägg under 45° vinkel. Väggen är glatt, varför den kraft, varmed stegen påverkas av väggen, är vinkelrät mot denna. Marken, som stegen vilar på, är horisontell och sträv. Den kraft, varmed marken påverkar stegen, kan upplösas i en vågrät och en lodrät komposant. Stegens tyngdpunkt ligger i dess mittpunkt. Rita en figur, som visar storlek och riktning av de fyra krafter, som påverkar stegen vid jämvikt. Beräkna storleken av de tre icke givna krafterna, om stegens tyngd är 15 kp.
3. En bil, som med last väger 5,2 ton, kör med frikopplad motor och utan att bromsas utför en rak, 250 m lång backe, vars lutning är 1 : 15. Då bilen kommer ned till backens slut, finner föraren, att dess hastighet är 60 km/tim. Hur många procent av bilens tyngd utgör motståndskraften vid bilens rörelse, om denna motståndskraft antas vara konstant under bilens rörelse utför backen? Bilen antas starta vid backens övre ände utan begynnelsehastighet. Accelerationen vid fritt fall får i denna exempel sättas till 10 m/sek².
4. En vichyvattensflaska, som nyss tömts på sitt innehåll, har en del vatten kvar på väggarna invändigt. Den tillslutes vid +14° C, då barometerståndet är 752 mm Hg-pelare och uppvärmes till +37° C.

[1] Provet för teleteknisk linje utgjordes av uppg. 2, 3, 5—8 för maskinteknisk linje jämte två för linjen avpassade uppg. i ellära.

Fortfarande finns det kvar något vatten på innerväggen i flaskan. Beräkna trycket i flaskan vid den högre temperaturen. Vattenångas mättningstryck är vid +14° C 12 mm Hg och vid +37° C 47 mm Hg.

5. En apparat för kondensering av ånga består av ett rör, som i sin tur är omgivet av ett vidare rör, genom vilket kallt vatten rinner i en jämn ström. Ånga från kokande alkohol kondenseras i en dylik apparat, så att man får 5 liter alkohol per timme. Kylarvattnet uppvärms därvid från +7,1° C till 25,3° C. Denna sistnämnda temperatur har även alkoholen, då den lämnar apparaten. Alkoholens kokpunkt är 78,3° C, dess ångbildningsvärme 202 kcal/kg, dess specifika värme 0,58 kcal/kg · grad och dess täthet 0,79 kg/l. Beräkna kylvattenåtgången per timme.
6. En milliamperemeter med mätområdet 0—60 mA skall förses med en shunt, som möjliggör mätning av strömstyrkor upp till 0,15 A. Shunten skall tillverkas av 0,20 mm tjock tråd med resistiviteten (specifika motståndet) 1,40 ohm · mm²/m. Hur lång bör tråden i shunten vara? Milliamperemeterns resistans är 10,5 ohm.
7. Polerna på ett torrelement förenas med två parallellt kopplade ledningar. Den ena av dessa innehåller en voltmeter med mycket stor resistans, den andra en amperemeter, ett skjutmotstånd samt en strömbrytare kopplade i serie. Då strömbrytaren är öppen, visar voltmetern 1,48 V. Sluts strömbrytaren, visar voltmetern 1,32 V och amperemetern 0,05 A. Beräkna härur elementets inre resistans.
8. Mellan ledningarna i ett likströmsnät, där spänningen är konstant 225 V, kopplades i serie två motstånd A och B. Resistansen var hos A 4000 ohm och hos B 9000 ohm. Med en voltmeter, vars resistans är 1000 ohm, mättes spänningen först över A och därefter över B. Vad visade voltmetern i de två fallen?

Resultat: **1.** 0,8 g/cm³. **2.** Väggen verkar med 7,5 kp och marken i horisontell led med 7,5 kp och i vertikal led med 15 kp. **3.** 1,1 %. **4.** 846 mm Hg. **5.** 50,5 kg. **6.** 16 cm. **7.** 3,2 ohm. **8.** Resp. 18,4 V och 41,3 V.

VI. Uppgifter i fysik för kemisk-teknisk linje

2. I ett mikroskop, vars längd är 18,0 cm, är objektivets brännvidd 8 mm och okularets 32 mm. Hur långt framför objektivet bör ett föremål placeras, för att ett öga skall se en tydlig bild i mikroskopet belägen 24 cm från ögat, när detta hålles tätt intill okularet? Vid beräkningen och konstruktionen av strålgången får såväl objektiv som okular betraktas som tunna linser.
3. En nyladdad ackumulator används som strömkälla vid förnickling av en yta av 1 dm² storlek. Beräkna tjockleken av det nickellager,

som utfälls per amperetimme. Nickels ekvivalentvikt är 29 och för utfällning av 1 gramekvivalent av ett ämne erfordras 96 500 coulomb. Tätheten för nickel är 8,8 g/cm³. Ingen hänsyn behöver tas till eventuella energiförluster.

Uppg. 1, 4—8 utgjorde uppg. med samma nr i V.

Resultat: 2. 8,4 mm. 3. 0,012 mm.

VII. Kemi med laboratorieteknik för kemisk-teknisk linje

1. Redogör för vad som menas med a) ett ämnes valens, b) katalysator, c) isomera föreningar, d) en gramekvivalent av ett ämne, e) organiska isoföreningar.
2. Angiv namn och kemisk sammansättning (formel) för minst två mineral, i vilka aluminium ingår. Redogör för hur aluminium framställes.
3. Redogör med fullständiga reaktionsformler för vad som bildas, då utspädda vattenlösningar av följande ämnen var för sig försättes med ammoniak i överskott: a) $FeCl_3$, b) $AgNO_3$, c) $CaCl_2$, d) $Cu(NO_3)_2$, e) $MgSO_4$.
4. Redogör för två principiellt olika metoder för kvantitativ bestämning av halten kloridjoner i en lösning.
5. Redogör för reaktionsformler för framställning av a) metan, b) myrsyra, c) aceton, d) etylbuturat.
6. Vad menas med a) polymerisation, b) kondensation inom den organiska kemien?
7. 0,25 g orent järn innehållande 98,8 % rent järn löses i utspädd svavelsyra. Lösningen förbrukar vid titrering 41,60 ml kaliumpermanganatlösning. Beräkna normaliteten för kaliumpermanganatlösningen. Föroreningarna i järnet förbrukar icke permanganat.
8. 100,0 ml 0,12 N svavelsyra blandas med 20,0 ml 0,2 M (mol) svavelsyra. Beräkna normaliteten för svavelsyran efter blandningen.
9. 25,0 ml av en lösning av SO_2 i vatten förbrukar vid titrering 12,63 ml 0,12 N jodlösning. Beräkna hur många ml SO_2-gas av 0° C och 760 mm Hg som lösningen av svavelsyrlighet innehåller per liter. Svavelsyrlighet och jod reagera enligt reaktionen: $SO_2+J_2+2H_2O=$ $=H_2SO_4+2HJ$.
10. 1,60 g $BaSO_4$ överföres genom glödgning med kol till BaS. Hur många ml 24 %-ig saltsyra (täthet=1,12) erfordras för att överföra bildad BaS till $BaCl_2$?

Atomvikter:

Ba=137,4 Cl=35,5 Fe=55,8 J=126,9 K=39,1 Mn=54,9 S=32,0

Resultat: 7. 0,106 N. 8. 0,167 N. 9. 679 ml. 10. 1,86 ml.

VIII. Beskrivande maskin- och byggnadslära för maskin-teknisk linje

1. En rund gjutjärnspelare med 30 cm diameter, belastad med en tryckkraft av 41,6 Mp, vilar med sin kvadratiska fot på en granitplint, som får belastas med 19 kp/cm². Plintens kvadratiska undersida vilar på en kvadratisk betongplatta och denna i sin ordning på hård pinnmo. Betongen får belastas med 13 kp/cm² och pinnmon med 9 kp/cm². Beräkna sidan på a) gjutjärnsfoten, b) granitplinten, c) betongplattan. Rita en skiss över anordningen.
2. Vid svarvning av en stålaxel är skärkraften på svarvstålet 1700 kp och skärhastigheten 0,18 m/s. Hur många kW fordrar motorn, om verkningsgraden räknad från motorns kabelklämmor till svarvspånet är 79 %?
3. Ett stålrör med 90 mm yttre diameter och 5 mm godstjocklek upplägges på två bockar med 2,3 m avstånd från varandra. Hur stor last kan röret bära på mitten, om en böjspänning av 12 kp/mm² tillåtes?
4. En remskiva med 150 mm diameter skall överföra 4,3 hk vid 720 r/min. Dragkraften i den ena remparten är 2,6 gånger så stor som i den andra. Beräkna de båda krafterna.
5. En handvinsch, som drives med två handvevar över en enkel kuggväxel, har en lintrumma med 220 mm diameter. Kuggantalen är 15 och 61. Vevarnas radie är 300 mm. Periferikraften på varje vev kan sättas till 17 kp. a) Beräkna hur många kg, som kan lyftas, om verkningsgraden är 91 %. b) Beräkna stållinans ungefärliga ytterdiameter, om trådarna i linan får belastas med 24 kp/mm². Lintrådarnas sammanlagda area sättes till $0{,}37 \cdot d^2$, där d = linans ytterdiameter.
6. Vid uppmätning av brännoljeförbrukningen för en dieselmotor, som direkt drev en elgenerator, fann man de värden, som är sammanställda i nedanstående tabell. a) Beräkna den specifika oljeförbrukningen i gram per kWh och rita ett diagram, som visar, hur denna varierar med belastningen i kW. b) Angiv den belastning, vid vilken man har den gynnsammaste oljeförbrukningen per kWh, samt storleken av denna förbrukning. c) Hur många procent större är den vid 280 kW?

Generatorns belastning	kW	160	200	250	340	440	600	720
Oljeåtgång	kg/h	55,9	61,0	67,3	82,2	102,2	137,4	167,0

7. Den längsgående skarven i en behållares mantel är utförd som enradig överlappsskarv med plåttjockleken = 12 mm, nitdelningen = = 48 mm och nithålsdiametern = 20 mm. Beräkna skjuvspänningen i nitarna, om plåtens maximala dragspänning är 535 kp/cm².
8. Till en gängskärningssvarv, vars ledarskruv har 3 gängor per tum,

hör en uppsättning växelhjul (satshjul) med kuggantalen 20, 25, 30, 39, 55, 60, 70, 100 och 127. En skruv med 4 mm stigning skall svarvas. a) Angiv vilka satshjul, som skall användas. b) Rita en skiss, som visar, hur de skall placeras.

Resultat: 1. a) 47 cm b) 57 cm c) 68 cm. 2. 3,8 kW. 3. 560 kp. 4. 36 och 93 kp. 5. a) 340 kg b) ca 6,2 mm. 6. b) 580 kW; 258 g/kWh c) 13 %. 7. 575 kp/cm². 8. a) 60 och 127 kuggar.

Forts. från sid. 149.

»Tag en del silver och lika mycket bly i en smältugn och håll massan flytande tills allt bly förtärts. Upprepa förfarandet flera gånger, ända tills silvret är glänsande.»

De gamla egyptiska recepten för betning och färgning av ull kunna *saponin,* som är ett skumbildande, neutralt tvättmedel. Träaska innetolkas enligt nutida kemisk erfarenhet. Vissa växtdelar innehålla håller pottaska, kaliumkarbonat, och användes kanske ännu idag på sina håll som tvättmedel. Många färgämnen användas alltjämt, t. ex. röd färg från vissa arter av sköldlusen, vidare krapp, alkanna, orselj, indigo och vejde.

Parcks närmare granskning av recepten visar, att de gamla egyptiska färgarnas arbetsmetoder i väsentliga stycken hållit sig vid liv ett par årtusenden. Det är vidare möjligt, att de två papyrerna, som här refererats, tillhöra det fåtal skrifter, som räddats undan det av kejsar Diocletianus år 290 utfärdade påbudet, att all i Egypten befintlig alkemistisk litteratur skulle beslagtagas och förstöras. Han fruktade nämligen att folk genom dylika kunskaper skulle kunna bli rika — och göra uppror mot härskaren. *J. Tandberg*

Tore Lundberg, *Hydromaskinlära.* Gumperts förlag, Göteborg 1956, viii+232 s., 229 fig., kr. 21:—.

De av författaren tidigare utgivna läroböckerna i hydromekanik från år 1944 och om pumpar från år 1950 har i föreliggande arbete sammanslagits och utökats med en framställning av fläktar och vattenturbiner. Hydromekaniken upptar ett 70-tal sidor och behandlar såväl statiken som dynamiken, den senare även med hänsyn till förluster. Av pumparna har centrifugalpumparna behandlats betydligt mer ingående än kolvpumparna. Kapitlet om fläktar utgör ett i vissa avseenden bearbetat utdrag ur tidskriften Fläkten och är, kanske just

av denna anledning, föga läroboksmässigt skrivet och ger en rätt osammanhängande beskrivning av fläktarnas verkningssätt och driftsförhållanden. Vattenturbinerna behandlas mera beskrivande men tyvärr har kaplanturbinen jämfört med peltonhjulet fått en alltför summarisk framställning.

Boken innehåller 41 lösta exempel och 112 övningsexempel.

Formlerna har skrivits på basis av mksa-systemet, som i allmänhet också begagnats vid problemlösningen.

Några felaktigheter och tryckfel förekommer i såväl framställningen som i problemen. På sid. 12 torde man beakta att p i formel (4 a) angivits i kp/m² i st. f. N/m², som tidigare angivits. I formel (54) sid. 97 saknas en tvåa i nämnaren på grund av att tryckhöjdssiffran felaktigt härletts ur pumpens huvudekvation. Beteckningen μb har använts i st. f. mb (millibar). Fig. 133 skall vändas helt om.

En större variation i övningsexemplen hade varit önskvärd. Framförallt gäller detta exemplen till centrifugalpumpar, där man nästan helt saknar problem på pumpars förhållande i drift. Även rörledningsproblemen är alltför likartade och belyser ej rättvist de genomgångna avsnitten. Man saknar också övningsexempel till kapitlen om kolvpumpar, fläktar och vattenturbiner.

Boken är närmast avsedd att användas som kursbok för högre tekniska läroverk och andra läroanstalter och omfånget torde i stort sett fylla behovet i detta avseende vad de förstnämnda skolorna beträffar.

Erik Storm

Insänd litteratur

John Wiley & Sons, Inc., New York/Chapman & Hall Ltd., London, 1958:

Niels Bohr, *Atomic Physics and Human Knowledge.* Pp. 101, $ 3.95.

L. L. Lowenstein, *Mathematics in Business.* Pp. 364, $ 4.95.

E. M. Hemmerling, *College Plane Geometry.* Pp. 310, $ 4.95.

W. Rostoker, *The Metallurgy of Vanadium.* Pp. 185, $ 8.50.

W. D. Kingery (Editor), *Ceramic Fabrication.* Pp. 235, $ 9.50.

M. Phister, Jr., *Logical Design of Digital Computors.* Pp. 408, $ 10.50.

T. W. Anderson, *Introduction to Multivariate Statistical Analysis.* Pp. 374, $ 12.50.

V. K. Zworykin/E. G. Ramberg/L. E. Flory, *Television in Science and Industry.* Pp. 300, $ 5.00.

E. S. Smith/M. Salkover/H. K. Justice, *Calculus.* Pp. 520, $ 6.50.

Trace Analysis. Symposium held at the New York Academy of Science. Pp. 642, $ 12.00.

Joseph S. Fruton/Sofia Simmonds, *General Biochemistry.* Pp. 1077, $ 18.00.

W. H. Sewerns/J. R. Fellows, *Air Conditioning and Refrigation.* Pp. 563, $ 10.25.

K. S. Kunz, *Numerical Analysis.* McGraw-Hill Book Co. New York/Toronto/London, 1957, Pp. 381, 60 s. net.

K. H. V. Booth, *Programming for an Automatic Digital Calculator.* Butterworth Scientific Publ., London, 1958, Pp. 238, 42 s. net.

H. E. Duckworth, *Mass Spectroscopy.* Cambridge Univ. Press, 1958, Pp. 206, 35 s. net.

H. G. Eggleston, *Problems in Euclidean Space.* Pergamon Press, London, 1957, Pp. 165, 40 s. net.

N. Bourbaki, *Théorie des ensembles.* Chapitre 4, Structures. Hermann, Paris, 1957, 124 p.

C. Berge, *Théorie générale des jeux à n personnes.* »Mémorial des sciences mathématiques», No. 138. Gauthier-Villars, Paris, 1957, 114 p.

L. Guillet, *Précis de métallographie.* Masson & Cie, Paris, 1958, 254 p., 1800 fr.

Fr. Cramer, *Papierchromatographie.* 4. Aufl., Verlag Chemie, Weinheim, 1958, 215 S., DM 21.—.

A. Findley, *Die Phasenregel und ihre Anwendungen.* 9. Aufl., bearbeitet von A. N. Campbell und N. O. Schmidt. Ins Deutsche übertragen. Verlag Chemie, Weinheim, 1958, 368 S., DM 32.—.

Fr. Oehme, *Dielektrische Messmethoden zur quantitativen Analyse.* Verlag Chemie, Weinheim, 1958, 134 S., DM 15.80.

L. Wolf, *Erdsatellit und Weltraumfahrt.* Aulis Verlag, Frankenberg, 1958, 75 S., DM 3,95.

S. Valentiner, *Vektoren und Matrizen.* 8. Aufl. Mit einem Anhang: H. König, Aufgaben zur Vektorrechnung. Sammlung Göschen Bd 354/354 a. W. de Gruyter, Berlin, 1958, 198 S., DM 4,80.

K. P. Grotemeyer, *Analytische Geometrie.* Sammlung Göschen Bd 65/65 a. Berlin, 1958, 202 S., DM 4,80.

P. B. Fischer, *Aritmetik.* 3. Aufl. Sammlung Göschen Bd 47. Berlin, 1958, 150 S., DM 2,40.

W. Haak, *Darstellende Geometri I.* 2. Aufl. Sammlung Göschen Bd 142. Berlin, 1958, 113 S., DM 2,40.

Niels Bohr, *Atomteori og naturbeskrivelse.* Schultz Forlag, København, 1958, 96 s., dkr. 9: 50.

F. Hjerting, *Lille Naturlære II.* Gyldendal, København, 1958, 95 s. kartor med text. Tryckt i Porvoo, Finland, 1958. I serien »Scandinavian University Books». Sv. Bokförlaget, Stockhlom, kr. 12: 50.

P. Kalaja, *Atlas över norra stjärnhimlen för Skandinavien.* Nio stjärn-

Å. Wallenquist, *Astronomi.* Den moderna astrofysikens resultat och forskningsmetoder. I serien »Scandinavian University Books». Sv. Bokförlaget, Stockholm, 1958, 309 s., kr. 28: —.

Nyhlén/Amundsson/Broman, *Rymdgeometri för gymnasiet.* Sv. Bokförlaget, Stockholm, 1957, 63 s., kr. 4: 75.

N. Evermark, *Funktionslära, differential- och integralkalkyl.* I. 160 s., kr. 7: 50. II. 158 s., kr. 7: 50. FörlagsAB Västra Sverige, Göteborg, 1957 och 1958.

George Green, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism.* Nottingham, 1828, Pp. 72. — Facsimile Ed., printed in Göteborg 1958 for Prof. S. Ekelöf. Rekv. från Inst. f. teoretisk ellära, Chalmers tekn. högskola, Göteborg. Pris inom de nordiska länderna kr. 25: — (portofritt).

Ny upplaga

Hedström · Rendahl · Ekbom

RÄKNETABELLER

för läroverken

16:e uppl. utgiven av adj. Lennart Ekbom

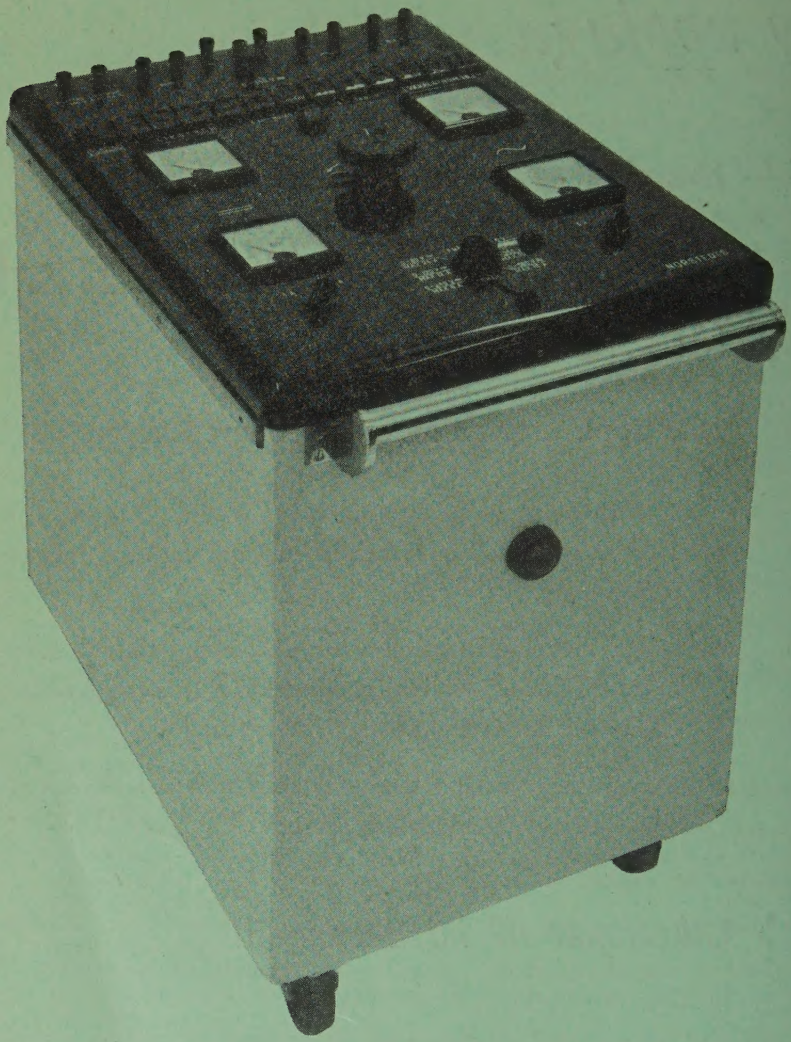
- I denna upplaga har räknetabellerna genomgått en genomgripande omarbetning.
- Några matematiska tabeller har tillkommit, och i de gamla har differenssiffror medtagits i större utsträckning än förut. Avdelningen med fysiska och kemiska konstanter har utökats.
- Typografiskt sett har tabellerna moderniserats. De har därigenom blivit mera överskådliga och lättlästa.

Utkommer till höstterminen!

B
F
SVENSKA BOKFÖRLAGET

SKOLBOKCENTRALEN
David Bagaresgata 20, Stockholm C · Postgiro 55 160
UTSTÄLLNING · LÄRAREXEMPLAR · REKVISITIONER
Utställning även Göteborg, Parkgatan 19
Malmö, Hamngatan 4 · *Linköping*, Klostergatan 26
Luleå, Tullgatan 16 · *Sundsvall*, Rådhusgatan 37

Den transportabla KOPPLINGSTAVLAN



Praktisk nyhet från Norstedts för alla läroverk och därmed jämställda läroanstalter. Kopplingstavlan kan användas var som helst där tillgång till 3-fas växelström finnes och är försedd med hjul för att lätt kunna flyttas.

NORSTEDTS SKOLAVDELNING

STOCKHOLM · GÖTEBORG · MALMÖ · LINKÖPING · LULEÅ · SUNDSVALL

LUND 1958. HÅKAN OHLSSONS BOKTRYCKERI